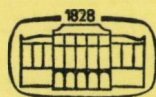


MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: MAJOR MÁTÉ

60. KÖTET
1—4. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1980

MŰSZ. TUD.

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

GESZTI P. OTTÓ, KÉZDI ÁRPÁD, PROHÁSZKA JÁNOS, VÁMOS TIBOR

SZERKESZTŐSÉG: 1383 BUDAPEST, MÜNNICH FERENC UTCA 7.

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST, ALKOTMÁNY UTCA 21.

A *Műszaki Tudomány* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Négy füzet alkot egy kötetet.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia
Műszaki Tudomány
1383 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A *Műszaki Tudomány* előfizetési ára kötetenként 100 Forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó 1363 (Budapest, Alkotmány utca 21. Pénzforgalmi jelzőszám 215—11488). külföldi megrendelések a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat 1389 (Budapest, Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám: 218—10990) útján eszközölhetők.

I. táblázat

ξ	1	A_n^*	B_n^*	C_n^*	D_n^*	A_n	B_n	C_n	D_n
β		$\text{bei}_n \beta + \frac{1-\mu}{\beta} \left(\text{ber}'_n \beta - \frac{n^2 \text{ber}_n \beta}{\beta} \right)$	$-\text{ber}_n \beta + \frac{1-\mu}{\beta} \left(\text{bei}'_n \beta - \frac{n^2 \text{bei}_n \beta}{\beta} \right)$	$\text{kei}_n \beta + \frac{1-\mu}{\beta} \left(\text{ker}'_n \beta - \frac{n^2 \text{ker}_n \beta}{\beta} \right)$	$-\text{ker}_n \beta + \frac{1-\mu}{\beta} \left(\text{kei}'_n \beta - \frac{n^2 \text{kei}_n \beta}{\beta} \right)$				
		$\text{bei}'_n \beta - \frac{1-\mu}{\beta} n^2 \left(\text{ber}'_n \beta - \frac{\text{ber}_n \beta}{\beta} \right)$	$-\text{ber}'_n \beta - \frac{1-\mu}{\beta} n^2 \left(\text{bei}'_n \beta - \frac{\text{bei}_n \beta}{\beta} \right)$	$\text{kei}'_n \beta - \frac{1-\mu}{\beta} n^2 \left(\text{ker}'_n \beta - \frac{\text{ker}_n \beta}{\beta} \right)$	$-\text{ker}'_n \beta - \frac{1-\mu}{\beta} n^2 \left(\text{kei}'_n \beta - \frac{\text{kei}_n \beta}{\beta} \right)$				
β_1		$\text{ber}_n \beta_1$	$\text{bei}_n \beta_1$	$\text{ker}_n \beta_1$	$\text{kei}_n \beta_1$	$-\text{ber}_n \beta_1$	$-\text{bei}_n \beta_1$	$-\text{ker}_n \beta_1$	$-\text{kei}_n \beta_1$
		$\text{ber}'_n \beta_1$	$\text{bei}'_n \beta_1$	$\text{ker}'_n \beta_1$	$\text{kei}'_n \beta_1$	$-\text{ber}'_n \beta_1$	$-\text{bei}'_n \beta_1$	$-\text{ker}'_n \beta_1$	$-\text{kei}'_n \beta_1$
		$-\text{bei}_n \beta_1 - \frac{1-\mu}{\beta_1} \left(\text{ber}'_n \beta_1 - \frac{n^2 \text{ber}_n \beta_1}{\beta_1} \right)$	$\text{ber}_n \beta_1 - \frac{1-\mu}{\beta_1} \left(\text{bei}'_n \beta_1 - \frac{n^2 \text{bei}_n \beta_1}{\beta_1} \right)$	$-\text{kei}_n \beta_1 - \frac{1-\mu}{\beta_1} \left(\text{ker}'_n \beta_1 - \frac{n^2 \text{ker}_n \beta_1}{\beta_1} \right)$	$\text{ker}_n \beta_1 - \frac{1-\mu}{\beta_1} \left(\text{kei}'_n \beta_1 - \frac{n^2 \text{kei}_n \beta_1}{\beta_1} \right)$	$\text{bei}_n \beta_1 + \frac{1-\mu}{\beta_1} \left(\text{ber}'_n \beta_1 - \frac{n^2 \text{ber}_n \beta_1}{\beta_1} \right)$	$-\text{ber}_n \beta_1 + \frac{1-\mu}{\beta_1} \left(\text{bei}'_n \beta_1 - \frac{n^2 \text{bei}_n \beta_1}{\beta_1} \right)$	$\text{kei}_n \beta_1 + \frac{1-\mu}{\beta_1} \left(\text{ker}'_n \beta_1 - \frac{n^2 \text{ker}_n \beta_1}{\beta_1} \right)$	$-\text{ker}_n \beta_1 + \frac{1-\mu}{\beta_1} \left(\text{kei}'_n \beta_1 - \frac{n^2 \text{kei}_n \beta_1}{\beta_1} \right)$
	$\frac{k l^2 \mathbf{P}}{\beta_n K \pi} \frac{\sin n \varepsilon}{n \varepsilon}$	$-\text{bei}'_n \beta_1$	$\text{ber}'_n \beta_1$	$-\text{kei}'_n \beta_1$	$\text{ker}'_n \beta_1$	$\text{bei}'_n \beta_1$	$-\text{ber}'_n \beta_1$	$\text{kei}'_n \beta_1$	$-\text{ker}'_n \beta_1$
α						$\text{bei}_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha} \left(\text{ber}'_n \alpha - \frac{n^2 \text{ber}_n \alpha}{\alpha} \right)$	$-\text{ber}_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha} \left(\text{bei}'_n \alpha - \frac{n^2 \text{bei}_n \alpha}{\alpha} \right)$	$\text{kei}_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha} \left(\text{ker}'_n \alpha - \frac{n^2 \text{ker}_n \alpha}{\alpha} \right)$	$-\text{ker}_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha} \left(\text{kei}'_n \alpha - \frac{n^2 \text{kei}_n \alpha}{\alpha} \right)$
						$\text{bei}'_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 \left(\text{ber}'_n \alpha - \frac{\text{ber}_n \alpha}{\alpha} \right)$	$-\text{ber}'_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha} \left(\text{bei}'_n \alpha - \frac{\text{bei}_n \alpha}{\alpha} \right)$	$\text{kei}'_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 \left(\text{ker}'_n \alpha - \frac{\text{ker}_n \alpha}{\alpha} \right)$	$-\text{ker}'_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 \left(\text{kei}'_n \alpha - \frac{\text{kei}_n \alpha}{\alpha} \right)$

II. táblázat

ξ	1	A_n^*	B_n^*	A_n	B_n	C_n	D_n
β		$\text{ber}_n \beta$	$\text{bei}_n \beta$	$-\text{ber}_n \beta$	$-\text{bei}_n \beta$	$-\text{ker}_n \beta$	$-\text{kei}_n \beta$
		$\text{ber}'_n \beta$	$\text{bei}'_n \beta$	$-\text{ber}'_n \beta$	$-\text{bei}'_n \beta$	$-\text{ker}'_n \beta$	$-\text{kei}'_n \beta$
		$-\text{bei}_n \beta - \frac{1-\mu}{\beta} \left(\text{ber}'_n \beta - \frac{n^2 \text{ber}_n \beta}{\beta} \right)$	$\text{ber}_n \beta - \frac{1-\mu}{\beta} \left(\text{bei}'_n \beta - \frac{n^2 \text{bei}_n \beta}{\beta} \right)$	$\text{bei}_n \beta + \frac{1-\mu}{\beta} \left(\text{ber}'_n \beta - \frac{n^2 \text{ber}_n \beta}{\beta} \right)$	$-\text{ber}_n \beta + \frac{1-\mu}{\beta} \left(\text{bei}'_n \beta - \frac{n^2 \text{bei}_n \beta}{\beta} \right)$	$\text{kei}_n \beta + \frac{1-\mu}{\beta} \left(\text{ker}'_n \beta - \frac{n^2 \text{ker}_n \beta}{\beta} \right)$	$-\text{ker}_n \beta + \frac{1-\mu}{\beta} \left(\text{kei}'_n \beta - \frac{n^2 \text{kei}_n \beta}{\beta} \right)$
	$\frac{k l^2 \mathbf{P}}{\beta K \pi} \frac{\sin n \varepsilon}{n \varepsilon}$	$-\text{bei}'_n \beta$	$\text{ber}'_n \beta$	$\text{bei}'_n \beta$	$-\text{ber}'_n \beta$	$\text{kei}'_n \beta$	$-\text{ker}'_n \beta$
α				$\text{bei}_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha} \left(\text{ber}'_n \alpha - \frac{n^2 \text{ber}_n \alpha}{\alpha} \right)$	$-\text{ber}_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha} \left(\text{bei}'_n \alpha - \frac{n^2 \text{bei}_n \alpha}{\alpha} \right)$	$\text{kei}_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha} \left(\text{ker}'_n \alpha - \frac{n^2 \text{ker}_n \alpha}{\alpha} \right)$	$-\text{ker}_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha} \left(\text{kei}'_n \alpha - \frac{n^2 \text{kei}_n \alpha}{\alpha} \right)$
				$\text{bei}'_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 \left(\text{ber}'_n \alpha - \frac{\text{ber}_n \alpha}{\alpha} \right)$	$-\text{ber}'_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 \left(\text{bei}'_n \alpha - \frac{\text{bei}_n \alpha}{\alpha} \right)$	$\text{kei}'_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 \left(\text{ker}'_n \alpha - \frac{\text{ker}_n \alpha}{\alpha} \right)$	$-\text{ker}'_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 \left(\text{kei}'_n \alpha - \frac{\text{kei}_n \alpha}{\alpha} \right)$



GÁBOR LÁSZLÓ

1910—1981

Pótolhatatlan veszteség érte a magyar építészet, az építés-építészettudomány és az építészképzés ügyét: 1981. október 28-án meghalt GÁBOR László, Állami- és Ybl díjas építész, a Budapesti Műszaki Egyetem Épületek Szerkezetei és Berendezései Intézetének alapító igazgatója, közel három évtizeden át az Épületszerkezeti Tanszék tanszékvezető egyetemi tanára, a Magyar Tudományos Akadémiának 1973 óta levelező-, 1979 óta pedig rendes tagja. Nagyszemélyiségű, ritka ember volt ő, az enciklopédisták kései utóda, egyszerre összefoglaló és újatindító, a hagyományos építés világából kilépő és a korszerű iparosítás irányába mutató építés-építészettudomány kiemelkedő jelentőségű művelője; a művészet, a tudomány és a technika hármas feltételrendszerére alapított építészképzés egyik legnagyobb hatású mestere.

Életműve mérföldkövet jelent az épületszerkezeti gondolkodásunk történetében és jelentősége — ha gazdag hagyatékát méltómód folytatjuk — messze túllépheti országunk határát.

Egy olyan korban, amelyben a Rész, hovatovább az Egész fölé tornyosulna, ő a művészetet az ipartól váró építészek élő lelkiismerete maradt, egyéni

utakon járó tudós-pedagógus, aki egy magateremtette tárgyalási és közlési móddal tette megközelíthetővé az épületszerkezetek világát. Az ő műve is lesz, ha építészetünkben az iparosítás feltétlen igenlése olyan módon jut érvényre, hogy rendszeralkotói-konstruktóri képességünk már megteremtheti azt a harmóniát, amelyben az építészet már nem rendelődik az építőipar alá, amelyben nem a forma követi a gyártást, mint napjainkban, hanem megfordítva, az ipar rendelődik alá az építészetnek, a gyártás követi a formát.

GÁBOR László 1910. november 22-én született, Debrecenben, értelmiségi családból. Innen hozta az írott és a beszélt szó szeretetét, az értelem, a világos gondolat becsülését, a közlés, a megírás vágyát. Festőnek készült, tervező építész lett. Egyetemi tanulmányait 1933-ban fejezte be a József Nádor Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetemen. 1933–44 években, a körülmények szorításában más nevével hozott létre önálló építészeti műveket. Sajátjaként publikált, sikerült építészeti alkotása az első nagy debreceni bérház és a felszabadulás után társszerzőkkel tervezett mai pártszékház.

Az alkotó-építészti pályát cserélte fel 1949-ben a pedagógus-tudóséval és mind az oktatói, mind a kutatói gyakorlatban a problémákat idejében és helyesen felismerő és azokban elmélyedő, analitikus szemléletű tudósnek bizonyult, aki széleskörű humán műveltsége alapján rendre, szintézisre törő építésztként közelíti meg tudományos feladatait. A hazai épületszerkezet-tan — amely a felszabadulás előtti viszonyoknak megfelelően alig volt több, mint a piac kínálta szerkezetek pusztá leírása — objektív kritériumokra alapozott tudománnyá fejleszti. Szisztematikus munkával kiépíti a kapcsolatokat az épületszerkezetek tervezéséhez és fejlesztéséhez támpontokat adó természettudományokkal, épületfizikai diszciplínákkal. A rendelkezésre álló anyagi erőkből kísérleti bázist teremt az épületszerkezetek oknyomozó vizsgálatához. Az épületfizikai-épületgépészeti-épületszerkezeti problémák együttes kezelésével valójában új kutatási irányt tár fel.

Építészeti tapasztalatai, szemlélete, alkotó vénája megóvják attól, hogy az intézetében irányításával folyó mégoly jelentős kutatásokat pusztán szűk értelemben vett technikai-technológiai szemszögből értékelje; az épületszerkezetekkel az épületek kedvéért, az épületekkel, az építészeti környezettel az igazabb és a szebb emberi élet megteremtése érdekében foglalkozik. Az épületszerkezet-tudományt a szerkezettervezés, épülettervezés eszközének tekinti és műveli.

Alkotói igényességének, oknyomozó szenvedélyének és rendszerteremtő logikájának nagyszerű példái szakkönyvei, mindenek előtt a négy kötetes *Épületszerkezet-tan*, amelynek utolsó, negyedik kötete 1979-ben jelent meg. Ez a mű — külföldön is — méltán keltette fel a szakmai közvélemény és a gyakorló építészek széles körének érdeklődését. A sokágú, sokrétű szakok, szakiparok összességének tudományos háttérét képező terület összefogása

egyetlen szerves és logikus felépítésű rendszerré, példátlan teljesítmény a szakma irodalmában. Hasonló teljességű épületszerkezettanuk még a rendszerésben oly kitűnő németeknek sincs.

Az utolsó években — munkatársaival — különös figyelmet fordít a nagyipari jellegű építés tudományos problémáira, hogy ezzel az elméletalkotó tevékenységével mintegy betetőzze közel ötvtizedes tervezői, oktatói és konstruktóri-tudományos munkásságát. Behatóan foglalkozik a tömeges építés elméleti kérdéseivel, a szerkezeti rendszerek és az építési technológiák nyíltságának problémáival, a tervezési, gyártási és építési variációk elméleti alapkérdéseivel, a koordináció és a variabilitás összefüggéseivel és alkalmazásuk törvényszerűségeivel, az energiagazdálkodásnak az építészetben betöltött szerepével, a rajznélküli ábrázolás, az ún. vaktervezés elméletével, a szilikátbázisú könnyűszerkezetes rendszerek elemzésével, az ún. nemtektonikus építés alapvető szerkezetelméleti kérdéseivel. Ezekről az új kutatásairól még csak akadémiai felolvasó üléseken tudott beszámolni. Az 1973-ban, majd 1979-ben tartott akadémiai székfoglaló előadásai a magyar építészetelméleti irodalom komoly értékei.

GÁBOR László alkotói és kutatói munkásságának különös — és építés-építészettudományunkban egyedülálló — ismérve, hogy ő életművét nem részletekből építette fel, hanem azt eleve összefüggő egészként anticipálta. Ő sohasem valamilyen részt ragadott ki önkényesen, hanem mindig az agyában már eleve megalkotott Egésznek egy alkotóelemét dolgozta fel és mindig úgy, hogy annak valamennyi összetevője végső fokon egy „időtlen” Építészet nem osztható egésze felé mutasson. Ezért volt olyan megdöbbentő váratlan drámai halála, mert ő — egyre csak befejezetlenséget érezve — újabb és újabb terveken töprengett, s bár több munkájának megjelenését sem érhetette már meg, gazdag örökséget hagyott ránk, de rengeteg kötelezettséget is.

Sokoldalú tudománypolitikai tevékenységét nagy aktivitás és céltudatosság jellemezte. Elnöke volt az MTA Építészettudományi Bizottságának, elnöke majd tagja a TMB Építészeti és Közlekedéstudományi Szakbizottságának, a METESZ vezetőségi tagja, az ÉVM Műszaki Fejlesztési tanácsának tagja, az Építés-Építészettudomány szerkesztőbizottságának tagja, a Magyar Építőművészek Szövetségének alapító és három évig elnökségi tagja. Rendszeresen részt vett az OMFB, a TTI, a Lakóterv és az Iparterv keretén belüli bizottságok, tervtanácsok munkájában. Az Építésügyi Kormányzat munkáját a „kiváló munkáért” kitüntetéssel jutalmazta 1948-ban, a „Felsőoktatás Kiváló dolgozója” lett 1952-ben, Munkaérdemrendet kapott 1955-ben. Az Ybl Miklós díj I. fokozatával tüntették ki 1963-ban, Állami díj III. fokozatát kapta 1965-ben. 1970-ben a Felszabadulási jubileumi emlékérem mellett a Munkaérdemrend aranyfokozatát is megkapta. 1971-ben a BME és a MÉSZ emlékéremmel ismerte el tevékenységét. 1981-ben nyugalomba vonulása alkalmából a Szocialista Magyarorszáért érdemrenddel tüntették ki.

GÁBOR Lászlót 1981. november 10-én temették a Farkasréti temetőbe. De csak a testét, szelleme és alkotásai fennmaradnak, tovább élnek tanítványai, munkatársai, tisztelői és követői emlékezetében és munkájában a magyar, valamint az egyetemes építészet javára.

*Párkányi Mihály**

GÁBOR LÁSZLÓ szakmai és tudományos munkássága

1. Tervező építési munkássága:

Lakóépületek, ipari épületek, középületek: Berényi u. 6/b., XII. Tigris u. 46., Stoczek u. 19., II. Mártírok útja 29., XII. Szamos u. 5., II. Mártírok útja 44., XII. Maros u. 1/b., Belügyminisztérium (jelenleg MSzMP központi székháza) stb. tervezése. Számos tervpályázaton első díjat nyert:

2. Tudományos munkássága:

a) Szakcikk

Az építőipari költségmérés tudományos módszere

A különböző szintszámú lakóépületek szerkezeti és gazdasági vizsgálata, az optimális magasság megállapítása

A különböző típusú lakóépületek műszaki és gazdasági összehasonlító vizsgálata

Quelques problèmes relatifs de la protection des toits contre l'action thermique et la condensation des vapeurs. *ÉKME Tudományos Közlemények* (1963)

Korszerű víz- és nedvesség elleni szigetelés (társszerzőkkel). OMFB 1963

A 100 éves építésztechnológia története. *Periodica Polytechnica* (1972)

Centennial History of the Faculty of Architecture. *Periodica Polytechnica. Architecture* 16 (1972), No. 3—4

Az építészet és az építészettudomány feladata, jelentősége, gondoljai. *Magyar Tudomány* 4 (1972), 434—440

Kovács Margit állandó gyűjteményének katalógus-előszava, 1974

Major Máté köszöntése. *Periodica Polytechnica. Architecture*. Vol. 18 (1974) No. 1—2

Széll László: Építéstechnológia I. című könyvének ismertetése. *Műszaki Tudomány* 49 (1974) 479

Az építészeti tervezés és az építési technológia szerepe, összefüggése az alkotásban. *Építés-Építészettudomány* 6 (1974) 203—214 (Székfoglaló előadás)

Szeretném a lakásépítés egynehány nagyon időszerű tervezésméleti kérdését megvizsgálni. *Magyar Tudomány* 6 (1974) 82—84

Építészet, szerkezet, gyártás. *Építés-Építészettudomány* 7 (1975) 275—283

Architecture, structure, manufacture. *Periodica Polytechnica. Architecture* 19, No. 1—2

Az iparosított építés építészeti problémái. Megnyitó az MTA 1976. május 20—21-én tartott ankétján. *Építés-Építészettudomány* (1977) 3—8

Az építés-építészettudomány helyzete és fő feladatai az építésben, az építés iparosításában. *Magyar Tudomány* 10 (1978) 815—822

Széll László. 1903—1976. *Műszaki Tudomány* 53 (1977) 9—11

Sun Shields. *Periodica Polytechnica. Architecture* 22 (1978) 1—19

The Theory of Blind Design (társszerző: PÁRKÁNYI Mihály) *Periodica Polytechnica. Architecture* 23 (1979) 1—34

Építészet és energiagazdálkodás. Gondolatok és beszámoló egy sajátos megoldást kereső komplex kutatás és kísérlet tapasztalatai alapján és ürügyén (társszerző: ZÖLD András) *Magyar Tudomány* 11 (1979) 842—848

Hétköznapiak és csodák. Az építés világa és tudományos sajtószerepe. Székfoglaló előadás az MTA Műszaki Tudományok Osztálya nyilvános ülésén 1980 februárjában *Műszaki Tudomány* 57 (1979) 283—293

* GÁBOR László közvetlen munkatársa volt — egyes tudományos dolgozataikat együtt írták és jegyezték. Az Ő emlékének illik tehát itt — néhány kisebb szerkesztői módosítást — közölnöm.

Major Máté
felelős szerkesztő

Technológia, iparosítás, építészeti környezet. Az MTA 1981. évi közgyűléséhez kapcsolódó „Az épített környezet és a társadalmi-gazdasági fejlődés kölcsönhatása az urbanizációs folyamatban” című tudományos ülés referátuma. Az MTA Műszaki Tudományok Osztályának kiadványa. 1.–11 oldal, Budapest 1981. április 16.

b) Szakkönyvek

Önálló szakkönyvek:

Tetőfedések és fémlemez munkák I—III. Építőipari Könyv- és Lapkiadó 1952.

Épületszerkezettan I. kötet. Tankönyvkiadó 1960 (hat kiadásban)

Épületszerkezettan II. kötet. Tankönyvkiadó 1964 (négy kiadásban)

Épületszerkezettan III. kötet. Tankönyvkiadó 1972 (két kiadásban)

Épületszerkezettan IV. kötet. Tankönyvkiadó 1979

Díszlakatos munkák (kéziratban)

2. Szakkönyvek társszerzőkkel

A különböző intézmények (Lakóterv, Iparterv stb.) által kibocsátott részletterv-gyűjtemények részbeni tervezése és szerkesztése, teljes terjedelmű műszaki felülvizsgálata.

Az ún. szabvány-költségvetések készítése.

Szigetelőmunkák műszaki és kiviteli előírásai.

Az információ továbbítása és vétele az iparosított építésben. Bevezetés a vaktervezés elméletébe. (Társszerző: PÁRKÁNYI Mihály). Akadémiai Kiadó, Budapest 1979, 141.

Energiagazdálkodás az építészetben (társszerző: ZÖLD András) Akadémiai Kiadó, Budapest. Kiadása folyamatban.

A nemtektonikus építés alapvető szerkezetelméleti kérdései (társszerző: PÁRKÁNYI Mihály). Kézirat. (Megjelenik az MTA gyorsmonográfiáinak sorozatában.)

Megjegyzés: A fenti felsorolás nem tartalmazza a különböző intézetekben, szakmérnöki tanfolyamokon, tudományos ülésszakokon, külföldi tanulmányutakon stb. elhangzott előadásainak jegyzékét.

PEREMÉN BEFOGOTT ELLIPSZISLEMEZ

CSONKA PÁL
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1981. január 2-án]

A dolgozat polinom szerint megoszló merőleges erőkkel terhelt ellipszis alakú olyan síklemez erőjátékával foglalkozik, amely a peremén mereven be van fogva. A vizsgálatokat a technikai rugalmasságtan szokásos feltevéseinek keretében végzi: kimutatja, hogy a tárgyalt esetben a lemez alakváltozása és belső erői zárt polinommal fejezhető ki.

1. Bevezetés

A technikai rugalmasságtan problémáinak megoldása általában bonyolult összefüggésekre vezet, és csak ritkán sikerül a felmerülő feladatok megoldását zárt képletekkel kifejezni. E tekintetben kivételt alkot a jelen dolgozatban tárgyalt feladat: a peremén mereven befogott ellipszis alakú olyan síklemez problémája, amelyet polinom szerint megoszló merőleges erők terhelnek. Ebben az esetben ui. a lemez alakváltozását és belsőerőit leíró képletek zárt alakúak. Egyenletesen megoszló, valamint sík szerint megoszló merőleges teher esetében a vonatkozó képletek a szakirodalomból ismertek [3–11]. Ezeket a megoldásokat jelen dolgozat tetszőleges polinom szerint megoszló teher esetében alkalmazandó eljárás ismertetésével egészíti ki, és egyes egyszerű terhelési esetekben közvetlenül alkalmazható képleteket közöl.

Az ismertetendő eljárás feltételezi, hogy a lemez anyaga lineárisan rugalmas, vastagsága állandó és a lemez egyéb méreteihez viszonyítva csekély. Feltételezi továbbá, hogy a lemez a terhelés hatására csak kismértékű alakváltozást szenved.

2. Alapfogalmak, jelölések

{2}

Tárgyalásainkat derékszögű olyan $O(x, y, z)$ koordinátarendszerben végezzük, amelynek O kezdőpontja az ellipszislemez középpontjában van, x és y tengelyei pedig a középlap főtengelyeivel esnek egybe. Az x , illetve y irányú főugarakat a és b betűvel jelöljük (1. ábra) és megállapodunk az

$$\frac{x}{a} \equiv \xi, \quad \frac{y}{b} \equiv \eta, \quad (1)$$

valamint az

$$\frac{a}{b} = \gamma \quad (2)$$

egyszerűsítő jelölésben.

Az $O(x, y, z)$ koordináta-rendszerben a középsík peremvonalának egyenlete

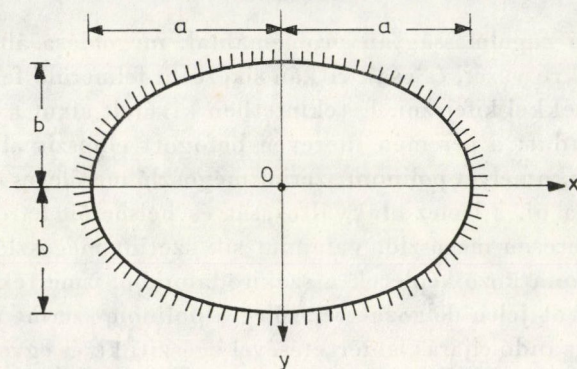
$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (3)$$

ha t_i . x_0 és y_0 a peremvonal pontjainak x és y koordinátái.

A lemezre ható teherként polinom szerint megoszló erőket veszünk számításba, és ezeket akkor tekintjük pozitívoknak, ha pozitív z irányban hatnak. Fajlagos értéküket a

$$p = p_{00} + p_{10}\xi + p_{01}\eta + p_{20}\xi^2 + p_{11}\xi\eta + p_{02}\eta^2 + \dots \quad (4)$$

polinommal fejezzük ki, ahol a $p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{20}, p_{11}, p_{02}, \dots$ értékek adott állandók.



1. ábra

A lemeznek a p terhek okozta alakváltozását a középsík pontjainak z irányú elmozdulását kifejező

$$w = w(\xi, \eta) \quad (5)$$

elmozdulásfüggvénnyel jellemezzük. Ez a függvény a technikai rugalmasságtan tanítása szerint [1–5] az

$$\frac{1}{a^4} \cdot \frac{\partial^4 w}{d\xi^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \cdot \partial \eta^2} + \frac{1}{b^4} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \frac{p}{K} \quad (6)$$

differenciálegyenletnek tartozik megfelelni, ahol K a lemez hajlító merevségét kifejező ún. lemezállandó. Utóbbinak értéke

$$K = \frac{Et_0^3}{12(1 - \mu^2)}. \quad (7)$$

Itt E a lemez anyagának rugalmassági tényezője, μ a haránt kontrakció tényezője, t_0 pedig a lemez vastagsága.

A peremén befogott lemezről lévén szó, a w elmozdulásfüggvény a peremvonal mentén teljesíteni tartozik a

$$w = 0, \quad (8)$$

valamint a

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (9)$$

feltételeket.

3. A feladat megoldása

Az ismeretlen w elmozdulásfüggvényt

$$w = \frac{a^4}{K} (\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 G(\xi, \eta) \quad (10)$$

alakban kíséreljük meg felvenni, ahol a $G(\xi, \eta)$ a teherfüggvény fokszámával egyező fokszámú ismeretlen együtthatós polinom:

$$G = G_{00} + G_{10} \xi + G_{01} \eta + G_{20} \xi^2 + G_{11} \xi \eta + G_{02} \eta^2 + \dots \quad (11)$$

Az ekként megszerkesztett w függvény felépítésénél fogva eleve megfelel a (8) peremfeltételnek, de egyúttal eleget tesz a (9) peremfeltételeknek is. Így a feladat megoldása az ismeretlen G_{00} , G_{10} , G_{01} , G_{20} , G_{11} , G_{02} ... együtthatók meghatározására redukálódik. Ezeknek az együtthatóknak oly értéket kell tulajdonítanunk, hogy a w függvény pontosan feleljen meg a (6) differenciálegyenletnek.

A G polinomot a teherpolinom egyes tagjainak megfelelő részekből célszerű összerakni. Az egyes részek együtthatóit — ha ezeket illetően nem állnak rendelkezésre táblázatba foglalt képletek — a (6) differenciálegyenlet segítségével kell meghatározni. Ez a művelet a teherpolinom fokszámától és szerkezetétől függően több-kevesebb egyenletből álló lineáris egyenletrendszer megoldását teszi szükségessé. Magát a számítást fokozatos lépésekben, a tagok megfelelő csoportosításával célszerű végrehajtani.

Ha például a teherpolinom tiszta m -ed fokú, x -ben és y -ban egyaránt páros függvény, akkor a G polinom $m!$ számú tagot tartalmazó m -ed fokú függvény. Ilyenkor a feladat megoldása $m!$ számú ismeretlen meghatározását, tehát egy $m!$ -számú egyenletből álló lineáris egyenletrendszer megoldását teszi szükségessé. A számítás során először az m -ed fokú tagok együtthatóit állapítjuk meg, ami egy $(m/2) + 1$ számú egyenletből álló lineáris egyenletrendszer megoldását igényli. Ezután az $(m-2)$ -ed fokú tagok együtthatóit határozzuk meg, amihez egy $m/2$ -számú egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldani. Ezt a számítást elvégezve, az $(m-4)$ -ed fokú tagok együtthatóit határozzuk meg egy $[(m/2) - 1]$ számú egyenletből álló egyenletrendszer megoldása révén. Ekként fokról fokra tovább haladva, végül is az abszolút tag együtthatóját

állapítjuk meg, ami már csak egyetlen egy egyenlet megoldását teszi szükségessé.

Hasonló lépésekben célszerű a G polinom ismeretlen együtthatóit meghatározni egyéb terhelési esetekben is.

Egyes egyszerű esetekben a G polinom együtthatói az 1. táblázatból vehetők ki. Ennek a táblázatnak a segítségével a feladat megoldása bármely másodfokú polinommal jellemezhető terhelési esetben közvetlenül megadható.

1. táblázat

p	a G polinom együtthatói
1	$G_{00} = \frac{1}{8(3 + 2\gamma^2 + 3\gamma^4)}$
ξ	$G_{10} = \frac{1}{24(5 + 2\gamma^2 + \gamma^4)}$
η	$G_{01} = \frac{1}{24(1 + 2\gamma^2 + 5\gamma^4)}$
ξ^2	$G_{00} = \frac{2(3 + 11\gamma^2 + 41\gamma^4 + 9\gamma^6)}{3(3 + 2\gamma^2 + 3\gamma^4)(5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8)}$ $G_{20} = \frac{1 + 4\gamma^2 + 15\gamma^4}{3(5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8)}$ $G_{02} = \frac{-(2 + 2\gamma^2)}{3(5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8)}$
$\xi\eta$	$G_{11} = \frac{1}{24(5 + 6\gamma^2 + 5\gamma^4)}$
η^2	$G_{00} = \frac{2(9\gamma^2 + 41\gamma^4 + 11\gamma^6 + 3\gamma^8)}{3(3 + 2\gamma^2 + 3\gamma^4)(5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8)}$ $G_{20} = \frac{-(2\gamma^2 + 2\gamma^4)}{3(5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8)}$ $G_{02} = \frac{15 + 4\gamma^2 + \gamma^4}{3(5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8)}$

A lehetséges terhelési esetek közt külön is megemlítendő az az eset, amelyben a lemez a peremvonálhoz hasonló ellipszisek mentén azonos intenzitású, belülről kifelé négyzetesen növekvő erőkkkel van terhelve. Ebben a különleges esetben

$$p_{20} = p_{02} \equiv A,$$

tehát a teherfüggvény

$$p = A(\xi^2 + \eta^2).$$

A w elmozdulásfüggvény

$$w = \frac{a^4}{K} (\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 (G_{20} \xi^2 + G_{02} \eta^2 + G_{00}),$$

ahol G_{00} , G_{20} és G_{02} a két terhelési tagnak megfelelő két-két részből tevődik össze:

$$G_{00} = \frac{2A}{3} \cdot \frac{(3 + 11\gamma^2 + 41\gamma^4 + 9\gamma^6) + (9\gamma^2 + 41\gamma^4 + 11\gamma^6 + 3\gamma^8)}{(3 + 2\gamma^2 + 3\gamma^4)(5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8)},$$

$$G_{20} = \frac{A}{3} \cdot \frac{(1 + 4\gamma^2 + 15\gamma^4) - (2\gamma^2 + 2\gamma^4)}{5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8},$$

$$G_{02} = \frac{A}{3} \cdot \frac{(15 + 4\gamma^2 + \gamma^4) - (2 + 2\gamma^2)}{5 + 20\gamma^2 + 78\gamma^4 + 20\gamma^6 + 5\gamma^8}.$$

4. A lemez igénybevétele

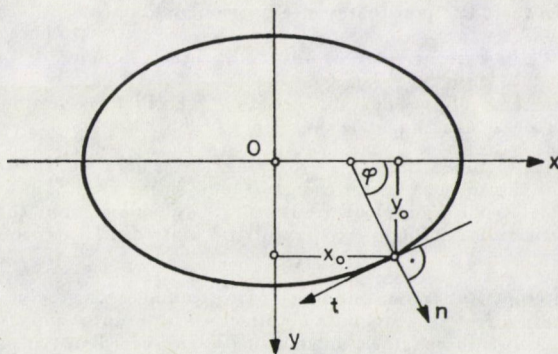
Ismervén a w elmozdulásfüggvényt, a p teher hatására keletkező nyomatékokat a lemezelmélet ismert képleteivel számíthatjuk [1–5]:

$$m_x = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$m_{xy} = -K(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y},$$

$$m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

A lemez peremvonalának $x = x_0$, $y = y_0$ pontjában (2. ábra)



2. ábra

$$\tan \varphi = -\frac{1}{\partial y / \partial x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x_0^2}}{x_0} = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0},$$

és így ott

$$\sin^2 \varphi = \frac{a^4 y_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2},$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{b^4 x_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2},$$

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{a^2 b^2 x_0 y_0}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}.$$

Ennek megfelelően az ismert transzformációs képletek szerint az x_0, y_0 kerületi pontban az n, t irányokban működő nyomatékok [1];

$$m_n = m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + 2m_{xy} \sin \varphi \cdot \cos \varphi,$$

$$m_{nt} = (m_y - m_x) \sin \varphi \cdot \cos \varphi + m_{xy}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),$$

$$m_t = m_x \sin^2 \varphi + m_y \cos^2 \varphi - m_{xy} \sin \varphi \cdot \cos \varphi.$$

Mindezek a képletek a nyomatékokra zárt összefüggéseket eredményeznek.

IRODALOM

1. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. Springer-Verlag, Wien 1959, 5. Aufl. pp. 159–165
2. TIMOSHINKO, S.—WOINOWSKY-KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York—Toronto—London 1959, 2nd Ed., pp. 310–313
3. L'HERMITE, R.: Résistance des matériaux. Théorique et expérimentale. Tome I, Dunod Paris, pp. 554–555
4. SZILÁRD, R.: Theory and Analysis of Plates. Classical and Numerical Methods. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1974, pp. 124–125
5. LOVE, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. At he University Press, Cambridge 1944, 1952, p. 484
6. SENGUPTA, H. M.: The Bending of an Elliptic Plate under Certain Distribution of Load. *Bulletin Calcutta Math. Soc.*, **40** (March and June 1948, December 1949), 17–35, 55–63
7. PERRY, C. L.: The Bending of Thin Elliptical Plates. *Proc. III. Symp. Appl. Math.* McGraw Hill **3** (1950), 131–139
8. SETH, B. R.: Bending of an Elliptic Plate with a Confocal Hole. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* **2** (1949), 177–181
9. HAPPEL, H.: Über das Gleichgewicht von elliptischen Platten. *Mathematische Zeitschrift* **11** (1921), 194–223
10. NICOLAS, M. M.: Plaques minces de contour elliptique. *Annales des Ponts et Chaussées* **107** (1937), — VII (Juillet), 161–166
11. OLSSON, R. G.: Biegung elliptischer und kreisförmiger Platten veränderlicher Dicke bei hydrostatischer Belastung. *Ingenieur Archiv* **9** (1938), 108–115

Elliptic Plate with Clamped Edge. — Applying the usual assumptions of the technical theory of elasticity, an elliptic plate with clamped edge is analysed. The plate in question is subject to normal loads of polynomial distribution. It is demonstrated that exceptionally in the present case the deflection and stress pattern of the plate can be expressed by very simple closed formulae.

Elliptische Platte mit Randeinspannung. — Im Rahmen der technischen Elastizitätslehre wird eine ringsherum fest eingespannte elliptische Platte unter polynomartig verteilter Normallast behandelt. Es wird nachgewiesen, daß in diesem speziellen Ausnahmefall die Formänderung und das Kräftespiel der Platte durch einfache geschlossene Formeln ausgedrückt werden können.

PERIODIKUSAN TERHELT RUGALMAS ÁGYAZÁSÚ KÖRLEMEZEK

MÁRKUS GYULA*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. július 23-án]

A dolgozat állandó vastagságú, periodikusan terhelt, rugalmas ágyazású, vékony és izotrop körlemezekkel foglalkozik. A bemutatásra kerülő elmélet segítségével lehetőség van minden olyan, körív mentén ható terhelés hatására a lemez alakváltozásait és igénybevételeit analitikus módon meghatározni, amelynek Fourier-sora ismeretes.

1. Lemezelmélet

Az állandó vastagságú, rugalmas ágyazású, vékony és izotrop körlemez differenciálegyenlete r, φ poláris koordináta rendszerben a rugalmas elmélet alapján az alábbiak szerint írható fel:

$$\begin{aligned} \nabla \nabla w + \frac{q(r, \varphi)}{K} = \\ = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \\ + \frac{k_0}{K} w = \frac{p(r, \varphi)}{K}. \end{aligned} \quad (1)$$

A fenti egyenletben w a lemez középfelületének merőlegesen mért eltolódását, r valamely pontjának a kezdőponttól mért távolságát, φ a kérdéses pontot a középponttal összekötő sugár és a kezdő irány közötti szöveget, k_0 a Winkler — Schwedler-féle ágyazási tényezőt, $p(r, \varphi)$ a koordinátáktól függő felületi terhelést,

$$q(r, \varphi) = k_0 w \quad (2)$$

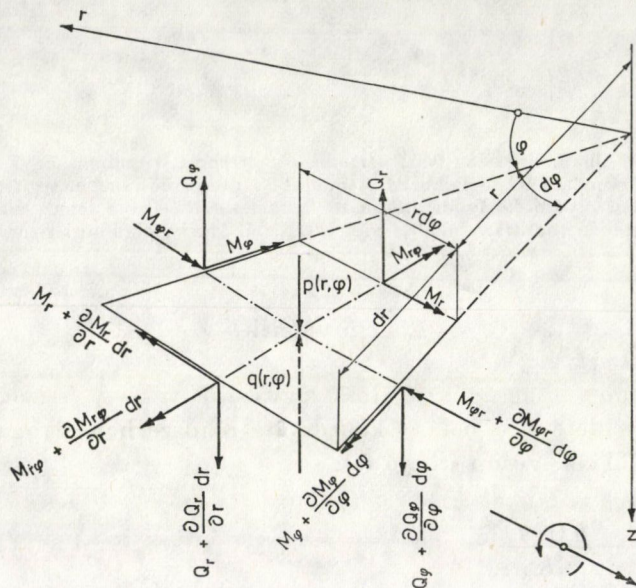
talajreakcióerőt, K pedig az ún. lemezmerevséget jelenti, amelynek értéke

$$K = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad (3)$$

* Dr. Márkus Gyula, 1112 Budapest, Süveg u. 4/a.

ahol E a rugalmassági modulus, μ pedig a keresztirányú nyúlási együttható, azaz a Poisson-féle szám reciprok értéke.

Az 1. ábra a körlemezről kivágott elemi testre ható pozitív előjelű metszeterőket tünteti fel. A w eltolódás függvény ismeretében felírhatók az elfordulások, a nyomatékok (sugár-, érintőirányú, csavaró), a nyíróerők (sugár-,



1. ábra. A körlemezről kivágott elemre ható metszeterők

érintőirányú) és esetleges támaszoknál a reakcióerők (sugár-, érintőirányú) kifejezései:

$$\begin{aligned} \vartheta_r &= -\frac{\partial w}{\partial r}; \quad \vartheta_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \\ M_r &= -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\ M_\varphi &= -K \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \\ M_{r\varphi} = M_{\varphi r} &= -(1 - \mu) K \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \\ Q_r &= -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 Q_\varphi &= -K \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} \right), \\
 V_r &= \pm K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2-\mu}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{3-\mu}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \\
 V_\varphi &= \pm K \left(\frac{2-\mu}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \varphi} + \frac{2\mu-1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + 2 \frac{1-\mu}{r^3} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right).
 \end{aligned}$$

A reakcióerőknél — amelyek akkor pozitív előjelűek, ha alulról felfelé támadják a lemezt —, kettős előjelet találunk. A felső előjel a kezdőponthoz, illetve kezdőirányhoz képest távolabb fekvő peremre, az alsó előjel pedig a közelebb fekvőre vonatkozik.

2. A körlemez differenciálegyenletének általános megoldása

A lemez terhelésével kapcsolatban feltételezzük, hogy érintőirányú változását az alábbi Fourier-sor fejezi ki;

$$p(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \sin n\varphi, \quad (5)$$

ahol a_0 , a_n és \bar{a}_n az ún. Fourier-együtthatók az r sugár és a terhelés intenzitásának a függvényei.

A rugalmas ágyazású körlemez (1) alatti Bessel típusú parciális differenciálegyenletének általános megoldása az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásából és a homogén egyenlet A , B , C és D , valamint \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} és \bar{D} integrálási állandókkal bővített megoldásából áll, amely az (5) alatti terheléshez hasonló összegeзések formájában állítható elő. A lehajlásfüggvény n -dik tagja Thomson-függvényekkel a következő módon írható fel:

$$\begin{aligned}
 w_n = w_{n0} &+ [(A_n \cos n\varphi + \bar{A}_n \sin n\varphi) \text{ber}_n \xi + \\
 &+ (B_n \cos n\varphi + \bar{B}_n \sin n\varphi) \text{bei}_n \xi + \\
 &+ (C_n \cos n\varphi + \bar{C}_n \sin n\varphi) \text{ker}_n \xi + \\
 &+ (D_n \cos n\varphi + \bar{D}_n \sin n\varphi) \text{kei}_n \xi].
 \end{aligned} \quad (6)$$

Ebben az egyenletben w_{n0} az n -dik tag partikuláris megoldása,

$$\xi = \frac{r}{l}, \quad (7)$$

ahol l az ún. karakterisztikus hossz:

$$l = \sqrt[4]{\frac{K}{k_0}}. \quad (8)$$

Az n -ed rendű Thomson-függvények sorai, azok differenciálhányadosai, az igen nagy, illetve igen kicsi argumentumokra vonatkozó közelítő képletek, valamint a magasabb rendűeknek alacsonyabb rendűekkel való kifejezései a *Függelékben* találhatók.

A (6) alatti megoldás és a (4) alatti összefüggések segítségével felírhatók az elfordulások, nyomatékok, nyíróerők és reakcióerők kifejezései;

$$\begin{aligned}\vartheta_{rn} = \vartheta_{rn0} - \frac{1}{l} [& (A_n \cos n\varphi + \bar{A}_n \sin n\varphi) \operatorname{ber}'_n \xi + \\ & + (B_n \cos n\varphi + \bar{B}_n \sin n\varphi) \operatorname{bei}'_n \xi + \\ & + (C_n \cos n\varphi + \bar{C}_n \sin n\varphi) \operatorname{ker}'_n \xi + \\ & + (D_n \cos n\varphi + \bar{D}_n \sin n\varphi) \operatorname{kei}'_n \xi],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_{\varphi n} = \vartheta_{\varphi n0} + \frac{1}{l\xi} [& (A_n \sin n\varphi - \bar{A}_n \cos n\varphi) \operatorname{ber}_n \xi + \\ & + (B_n \sin n\varphi - \bar{B}_n \cos n\varphi) \operatorname{bei}_n \xi + \\ & + (C_n \sin n\varphi - \bar{C}_n \cos n\varphi) \operatorname{ker}_n \xi + \\ & + (D_n \sin n\varphi - \bar{D}_n \cos n\varphi) \operatorname{kei}_n \xi],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{rn} = M_{rn0} + \\ + \frac{K}{l^2} \left\{ (A_n \cos n\varphi + \bar{A}_n \sin n\varphi) \left[\operatorname{bei}_n \xi + \frac{1-\mu}{\xi} \left(\operatorname{ber}'_n \xi - \frac{n^2 \operatorname{ber}_n \xi}{\xi} \right) \right] - \right. \\ - (B_n \cos n\varphi + \bar{B}_n \sin n\varphi) \left[\operatorname{ber}_n \xi - \frac{1-\mu}{\xi} \left(\operatorname{bei}'_n \xi - \frac{n^2 \operatorname{bei}_n \xi}{\xi} \right) \right] + \\ + (C_n \cos n\varphi + \bar{C}_n \sin n\varphi) \left[\operatorname{kei}_n \xi + \frac{1-\mu}{\xi} \left(\operatorname{ker}'_n \xi - \frac{n^2 \operatorname{ker}_n \xi}{\xi} \right) \right] - \\ \left. - (D_n \cos n\varphi + \bar{D}_n \sin n\varphi) \left[\operatorname{ker}_n \xi - \frac{1-\mu}{\xi} \left(\operatorname{kei}'_n \xi - \frac{n^2 \operatorname{kei}_n \xi}{\xi} \right) \right] \right\}, \\ M_{\varphi n} = M_{\varphi n0} + \quad (9/1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}+ \mu \frac{K}{l^2} \left\{ (A_n \cos n\varphi + \bar{A}_n \sin n\varphi) \left[\operatorname{bei}_n \xi - \frac{1-\mu}{\mu\xi} \left(\operatorname{ber}'_n \xi - \frac{n^2 \operatorname{ber}_n \xi}{\xi} \right) \right] - \right. \\ - (B_n \cos n\varphi + \bar{B}_n \sin n\varphi) \left[\operatorname{ber}_n \xi + \frac{1-\mu}{\mu\xi} \left(\operatorname{bei}'_n \xi - \frac{n^2 \operatorname{bei}_n \xi}{\xi} \right) \right] + \\ + (C_n \cos n\varphi + \bar{C}_n \sin n\varphi) \left[\operatorname{kei}_n \xi - \frac{1-\mu}{\mu\xi} \left(\operatorname{ker}'_n \xi - \frac{n^2 \operatorname{ker}_n \xi}{\xi} \right) \right] - \\ \left. - (D_n \cos n\varphi + \bar{D}_n \sin n\varphi) \left[\operatorname{ker}_n \xi + \frac{1-\mu}{\mu\xi} \left(\operatorname{kei}'_n \xi - \frac{n^2 \operatorname{kei}_n \xi}{\xi} \right) \right] \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi n} = M_{\varphi r n} = M_{r \varphi n 0} + \\
 + (1 - \mu) \frac{K}{l^2 \xi} n \left[(A_n \sin n\varphi - \bar{A}_n \cos n\varphi) \left(\text{ber}'_n \xi - \frac{\text{ber}_n \xi}{\xi} \right) + \right. \\
 + (B_n \sin n\varphi - \bar{B}_n \cos n\varphi) \left(\text{bei}'_n \xi - \frac{\text{bei}_n \xi}{\xi} \right) + \\
 + (C_n \sin n\varphi - \bar{C}_n \cos n\varphi) \left(\text{ker}'_n \xi - \frac{\text{ker}_n \xi}{\xi} \right) + \\
 \left. + (D_n \sin n\varphi - \bar{D}_n \cos n\varphi) \left(\text{kei}'_n \xi - \frac{\text{kei}_n \xi}{\xi} \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{rn} = Q_{rn0} + \frac{K}{l^3} [(A_n \cos n\varphi + \bar{A}_n \sin n\varphi) \text{bei}'_n \xi + \\
 - (B_n \cos n\varphi + \bar{B}_n \sin n\varphi) \text{ber}'_n \xi - \\
 + (C_n \cos n\varphi + \bar{C}_n \sin n\varphi) \text{kei}'_n \xi - \\
 - (D_n \cos n\varphi + \bar{D}_n \sin n\varphi) \text{ker}'_n \xi], \quad (9/2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{\varphi n} = Q_{\varphi n0} - \frac{K}{l^3 \xi} n [(A_n \sin n\varphi - \bar{A}_n \cos n\varphi) \text{bei}_n \xi - \\
 - (B_n \sin n\varphi - \bar{B}_n \cos n\varphi) \text{ber}_n \xi + \\
 + (C_n \sin n\varphi - \bar{C}_n \cos n\varphi) \text{kei}_n \xi - \\
 - (D_n \sin n\varphi - \bar{D}_n \cos n\varphi) \text{ker}_n \xi],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{rn} = V_{rn0} \mp \\
 \mp \frac{K}{l^3} \left\{ (A_n \cos n\varphi + \bar{A}_n \sin n\varphi) \left[\text{bei}'_n \xi + \frac{1 - \mu}{\xi^2} n^2 \left(\text{ber}'_n \xi - \frac{\text{ber}_n \xi}{\xi} \right) \right] - \right. \\
 - (B_n \cos n\varphi + \bar{B}_n \sin n\varphi) \left[\text{ber}'_n \xi - \frac{1 - \mu}{\xi^2} n^2 \left(\text{bei}'_n \xi - \frac{\text{bei}_n \xi}{\xi} \right) \right] + \\
 + (C_n \cos n\varphi + \bar{C}_n \sin n\varphi) \left[\text{kei}'_n \xi + \frac{1 - \mu}{\xi^2} n^2 \left(\text{ker}'_n \xi - \frac{\text{ker}_n \xi}{\xi} \right) \right] - \\
 \left. - (D_n \cos n\varphi + \bar{D}_n \sin n\varphi) \left[\text{ker}'_n \xi - \frac{1 - \mu}{\xi^2} n^2 \left(\text{kei}'_n \xi - \frac{\text{kei}_n \xi}{\xi} \right) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{\varphi n} = V_{\varphi n 0} \mp & \quad (9/3) \\
 \mp \frac{K}{l^3 \xi} n \left\{ (A_n \sin n\varphi - \bar{A}_n \cos n\varphi) \left[\frac{1-\mu}{\xi} \left(3 \operatorname{ber}'_n \xi - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - \frac{n^2+2}{\xi} \operatorname{ber}_n \xi \right) + (2-\mu) \operatorname{bei}_n \xi \right] + \right. \\
 & + (B_n \sin n\varphi - \bar{B}_n \cos n\varphi) \left[\frac{1-\mu}{\xi} \left(3 \operatorname{bei}'_n \xi - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - \frac{n^2+2}{\xi} \operatorname{bei}_n \xi \right) - (2-\mu) \operatorname{ber}_n \xi \right] + \right. \\
 & + (C_n \sin n\varphi - \bar{C}_n \cos n\varphi) \left[\frac{1-\mu}{\xi} \left(3 \operatorname{ker}'_n \xi - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - \frac{n^2+2}{\xi} \operatorname{ker}_n \xi \right) + (2-\mu) \operatorname{kei}_n \xi \right] + \right. \\
 & \left. + (D_n \sin n\varphi - \bar{D}_n \cos n\varphi) \left[\frac{1-\mu}{\xi} \left(3 \operatorname{kei}'_n \xi - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - \frac{n^2+2}{\xi} \operatorname{kei}_n \xi \right) - (2-\mu) \operatorname{ker}_n \xi \right] \right\} .
 \end{aligned}$$

A végeredményt az egyes tagok összegezése után kapjuk:

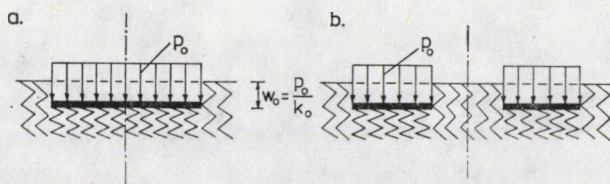
$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n; \quad \vartheta_r = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{rn}; \quad \vartheta_{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{\varphi n}, \\
 M_r &= \sum_{n=0}^{\infty} M_{rn}; \quad M_{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{\varphi n}; \quad M_{r\varphi} = M_{\varphi r} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{r\varphi n}, \\
 Q_r &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_{rn}; \quad Q_{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{\varphi n}; \quad V_r = \sum_{n=0}^{\infty} V_{rn}; \quad V_{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} V_{\varphi n}.
 \end{aligned} \quad (10)$$

Körszimmetrikus terhelés esetén $n = 0$, az egyes jelzéseknél azonban láb-indexben a zérust egyszerűség kedvéért el szokták hagyni. Egyenletesen megoszló, $p(r, \varphi) = p_0$ terhelésnél (2. ábra) a lemez önmagával párhuzamosan besüllyed a talajba, miközben a

$$w_0 = \frac{p_0}{k_0} \quad (11)$$

eltolódást végzi. Ez egyben az (1) alatti differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldása. A (4) alapján következik, hogy

$$\vartheta_{r0} = M_{r0} = M_{\varphi 0} = Q_{r0} = V_{r0} = 0. \quad (12)$$



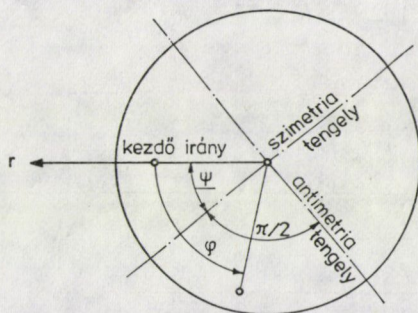
2. ábra. Egyenletesen megoszlóan terhelt rugalmas ágyazású kör és körgyűrű alakú lemez

Antimetrikus terhelés és alakváltozás esetén, amikor a teherfüggvény (5) $\cos \varphi$, illetve $\sin \varphi$ szerint változik, $n = 1$:

$$p(\varphi) = a_1 \cos \varphi + \bar{a}_1 \sin \varphi. \quad (13)$$

Az ilyen jellegű terhelésnek van egy szimmetria és egy antimetria tengelye. Előbbi zárjon be a kezdőiránnyal ψ szöget (3. ábra). Egyenletesen változó felületteher esetén

$$p(r, \varphi) = p_1 \frac{r}{a} \cos(\varphi - \psi) = p_1 \frac{r}{a} (\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi). \quad (14)$$



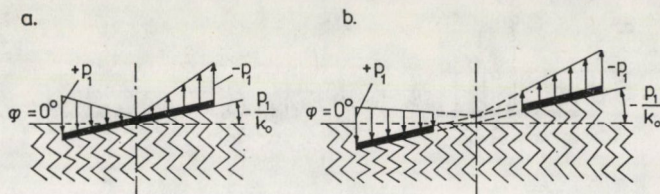
3. ábra. Antimetrikusan terhelt körlemez

Ez azt jelenti, hogy a (13) alatti teherfüggvényben

$$a_1 = p_1 \frac{r}{a} \cos \psi; \quad \bar{a}_1 = p_1 \frac{r}{a} \sin \psi. \quad (15)$$

Ilyen megoszlású terhelés esetén a rugókon álló szabad peremű kör, illetve körgyűrű alakú lemez az antimetria tengely körül elfordul, görbülete nem változik (4. ábra). A talajba való benyomódását a

$$w_{10} = \frac{p_1 r}{a k_0} \cos(\varphi - \psi) \quad (16)$$



4. ábra. Egyenletesen változóan terhelt rugalmas ágyazású kör és körgyűrű alakú lemez

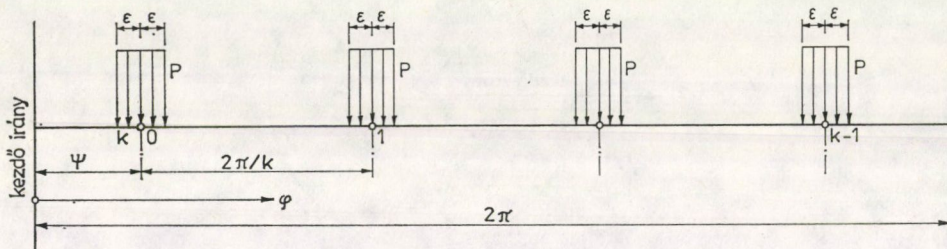
függvény fejezi ki. Mivel az azonos a partikuláris megoldással, (4) alapján

$$\vartheta_{r10} = -\frac{P_1}{ak_0} \cos(\varphi - \psi); \quad \vartheta_{\varphi10} = \frac{P_1}{ak_0} \sin(\varphi - \psi), \quad (17)$$

$$M_{r10} = M_{\varphi10} = M_{r\varphi10} = Q_{r10} = Q_{\varphi10} = V_{r10} = 0.$$

Rugalmas ágyazású körlemezek esetén a periodikus terhelések közül a mérnöki gyakorlatban legtöbbször a P intenzitású szakaszos vonalerő (5. ábra) fordul elő:

$$p(\varphi) = \frac{2kP}{\pi} \left[\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{k} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin m k \varepsilon \cos m k (\varphi - \psi) \right]. \quad (18)$$



5. ábra. Egyenletesen megoszló, szakaszos vonalerők

Ebben a kifejezésben k az erőcsoportok számát, ε pedig a vonalerő közepén és szélein áthaladó sugarak közötti szöveget jelenti. Bevezetve a

$$n = mk, \quad (19)$$

valamint a

$$P = \frac{\mathbf{P}}{2b_1 \varepsilon} = \frac{\mathbf{P}}{2\beta_1 l \varepsilon} \quad (20)$$

jelöléseket,

$$p(\varphi) = \frac{k\mathbf{P}}{\beta_1 l \pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=k,2k,\dots}^{\infty} \frac{\sin n \varepsilon}{n \varepsilon} \cos n(\varphi - \psi) \right]. \quad (21)$$

Jelen esetben \mathbf{P} a $b_1 = \beta_1 l$ sugarú kör mentén ható, $2 b_1 \varepsilon$ szakaszra eső, P intenzitású vonalerő eredőjét jelenti. Amennyiben a P vonalerők helyett \mathbf{P} koncentrált erők támadják a lemezt,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} = 1. \quad (22)$$

Ekkor a terhelés végtelen trigonometrikus sora:

$$p(\varphi) = \frac{k\mathbf{P}}{\beta_1 l\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=k, 2k, \dots}^{\infty} \cos n(\varphi - \psi) \right]. \quad (23)$$

Ha a szimmetria tengelyben ($\psi = 0$), a $b_1 = \beta_1 l$ sugarú kör mentén csupán egy koncentrált \mathbf{P} erő támadja a lemezt ($k = 1$):

$$p(\varphi) = \frac{\mathbf{P}}{\beta_1 l\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1, 2, 3, \dots}^{\infty} \cos n\varphi \right). \quad (24)$$

Az elmondottak mintájára M intenzitású, szakaszosan ható, sugárirányú vonal nyomaték Fourier-sorát is elő tudjuk állítani:

$$m(\varphi) = \frac{2kM}{\pi} \left[\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{k} \sum_{m=1, 2, \dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin m k \varepsilon \cos m k (\varphi - \psi) \right]. \quad (25)$$

Határozzuk meg a $2 b_1 \varepsilon$ szakaszra eső M megoszló vonalnyomaték \mathbf{M} eredő nyomatékát

$$\mathbf{M} = 2 \int_0^{\varepsilon} M b_1 \cos \varphi \, d\varphi = 2 M b_1 \sin \varepsilon. \quad (26)$$

Ezt behelyettesítve (25)-be

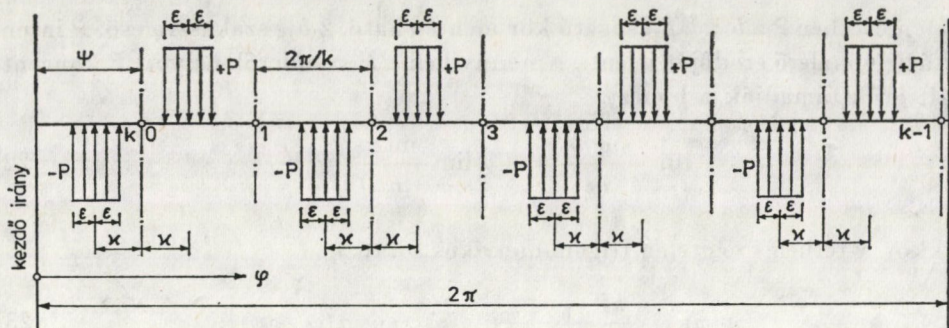
$$m(\varphi) = \frac{k\mathbf{M}\varepsilon}{\beta_1 l\pi \sin \varepsilon} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=k, 2k, \dots}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \cos n(\varphi - \psi) \right]. \quad (27)$$

Koncentrált sugárirányú nyomatékok esetén

$$m(\varphi) = \frac{k\mathbf{M}}{\beta_1 l\pi} \left[\frac{1}{2} \sum_{n=k, 2k, \dots}^{\infty} \cos n(\varphi - \psi) \right]. \quad (28)$$

Amennyiben a b_1 sugarú körív mentén ható szakaszos vonalerők előjelüket is váltogatják (6. ábra), a terhelés végtelen trigonometrikus sora alábbi módon írható fel:

$$p(\varphi) = \frac{4P}{\pi} \sum_{m=1, 2, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{mk\varepsilon}{2} \sin \frac{mk\kappa}{2} \sin \frac{mk}{2} (\varphi - \psi). \quad (29)$$



6. ábra. Egyenletesen megoszló, váltakozó előjelű, szakaszos vonalerők

Ennél a sornál k csak páros szám lehet. Behelyettesítve a (19) és (20) alattiakat

$$p(\varphi) = \frac{kP}{b_1 \pi} \sum_{n=\frac{k}{2}, \frac{2k}{2}, \dots}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \sin n\kappa \sin n(\varphi - \psi). \quad (30)$$

Mint hogy ennél a terhelésnél az 1, 2, ..., k sugarak mentén antimetria tengelyek képződnek, mód nyílik arra, hogy vonalteher hatására sugarak mentén szabadon felfekvő módon alátámasztott rugalmas ágyazású körcikk, illetve körgyűrűcikk alakú lemez statikai mennyiségeit is meghatározzuk.

A bemutatott periodikus terhek körív mentén hatnak és nem függenek az r sugártól. Ez azt jelenti, hogy számításaink során csupán a homogénné tett differenciál-egyenlettel (1) kell foglalkoznunk [$p(r, \varphi) = 0$]. Ez esetben tehát partikuláris megoldásról sem beszélhetünk:

$$w_{r0} = \vartheta_{rr0} = \vartheta_{\varphi r0} = M_{rr0} = M_{\varphi r0} = M_{r\varphi 0} = Q_{rr0} = Q_{\varphi r0} = V_{rr0} = V_{\varphi r0}. \quad (31)$$

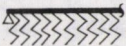


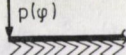
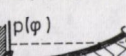
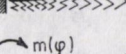
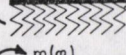



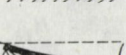
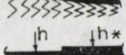

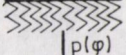

3. Kerületi feltételek

Az állandó vastagságú rugalmas ágyazású körlemez differenciálegyenletének (7) alatti megoldása peremenként négy-négy szabadon megválasztható integrálási állandót ($A_n, B_n, C_n, D_n; \bar{A}_n, \bar{B}_n, \bar{C}_n, \bar{D}_n$) tartalmaz. Ezeket a kerületek mentén felírható feltételi egyenletekből határozhatjuk meg. Az egyenletek száma minden esetben megegyezik az ismeretlenek számával.

Körlemez esetén, amelynek közepén nincs lyuk, véges értékű w_n eltolódást és $\partial^2 w_n / \partial r^2$ görbüetet kell kapnunk. A (6) alatti kifejezés alapján ez csak akkor lehetséges, ha

$$C_n = D_n = \bar{C}_n = \bar{D}_n = 0. \quad (32)$$

A 7. ábrában néhány megtámasztási módhoz és terhelési esethez megadjuk a kerületi feltételeket:

a.		$w = 0; \quad M_r = 0.$	(33)
b.		$w = 0; \quad \vartheta_r = 0.$	(34)
c.		$M_r = 0; \quad V_r = 0.$	(35)
d.		$M_r = 0; \quad V_r = -p(\varphi).$	(36)
e.		$\vartheta_r = 0; \quad V_r = -p(\varphi).$	(37)
f.		$M_r = m(\varphi); \quad V_r = 0.$	(38)
g.		$w = 0; \quad M_r = m(\varphi).$	(39)
h.		$w = \Delta(\varphi); \quad M_r = 0.$	(40)
i.		$w = \Delta(\varphi); \quad \vartheta_r = 0.$	(41)
j.		$M_r = 0; \quad \vartheta_r = \vartheta(\varphi).$	(42)
k.		$w = 0; \quad \vartheta_r = \vartheta(\varphi).$	(43)
l.		$w^* - w = 0; \quad \vartheta_r^* - \vartheta_r = 0, \quad \left. \begin{aligned} M_r^* - M_r &= 0; \quad V_r^* - V_r = 0. \end{aligned} \right\}$	(44)
m.		$w^* - w = 0; \quad \vartheta_r^* - \vartheta_r = 0, \quad \left. \begin{aligned} M_r^* - M_r &= 0; \quad Q_r^* - Q_r = 0. \end{aligned} \right\}$	(45)
n.		$w^* - w = 0; \quad \vartheta_r^* - \vartheta_r = 0, \quad \left. \begin{aligned} M_r^* - M_r &= 0; \quad Q_r^* - Q_r = p(\varphi). \end{aligned} \right\}$	(46)
o.		$w^* - w = 0; \quad \vartheta_r^* - \vartheta_r = 0, \quad \left. \begin{aligned} M_r^* - M_r &= m(\varphi); \quad Q_r^* - Q_r = 0. \end{aligned} \right\}$	(47)

7. ábra. Kerületi feltételek

4. Alakváltozások és igénybevételek a középpontban

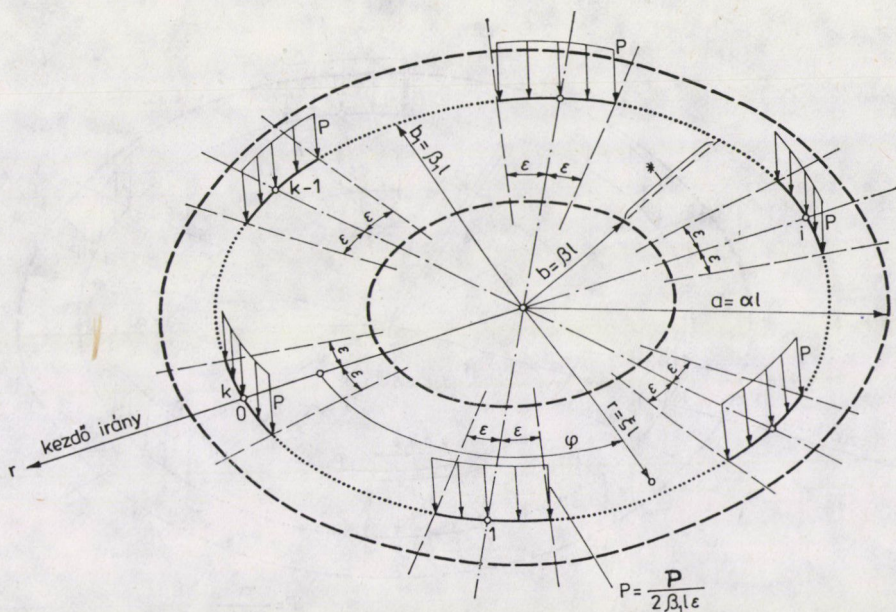
Körlemezek esetében szükségünk van a (6) és (9) alatti képletek értékeire a $\xi = 0$ pontban. A Thomson-függvények x igen kicsi argumentumaira a Függelékben megadott közelítő értékeket behelyettesítve, valamint a $\xi \rightarrow 0$ határátmenetet elvégezve az alábbi összefüggéseket nyerjük:

$$\begin{aligned}
 w &= A_0, \\
 \vartheta_r &= \frac{1}{2\sqrt{2}l} [(A_1 - B_1) \cos \varphi + (\bar{A}_1 - \bar{B}_1) \sin \varphi], \\
 \vartheta_\varphi &= -\frac{1}{2\sqrt{2}l} [(A_1 - B_1) \sin \varphi - (\bar{A}_1 - \bar{B}_1) \cos \varphi], \\
 M_r &= -\frac{K}{2l^2} \left[(1 + \mu) B_0 - \frac{1 - \mu}{2} (B_2 \cos 2\varphi + \bar{B}_2 \sin 2\varphi) \right], \\
 M_\varphi &= -\frac{K}{2l^2} \left[(1 + \mu) B_0 + \frac{1 - \mu}{2} (B_2 \cos 2\varphi + \bar{B}_2 \sin 2\varphi) \right], \\
 M_{r\varphi} &= -(1 - \mu) \frac{K}{4l^2} (B_2 \sin 2\varphi - \bar{B}_2 \cos 2\varphi), \\
 Q_r &= -\frac{K}{2\sqrt{2}l^3} [(A_1 + B_1) \cos \varphi + (\bar{A}_1 + \bar{B}_1) \sin \varphi], \\
 Q_\varphi &= -\frac{K}{2\sqrt{2}l^3} [(A_1 + B_1) \sin \varphi - (\bar{A}_1 + \bar{B}_1) \cos \varphi].
 \end{aligned} \tag{48}$$

5. Példák

Határozzuk meg a 8. ábra a és b sugarú, körgyűrű alakú lemezének integrálási állandóit a $b_1 = \beta_1 l$ sugarú körív mentén szakaszosan ható vonalerő (21) esetében. A feladat egy lábakon álló hűtőtorony alaplemezének tekinthető. Tételezzük fel, hogy a kezdőirány egybeesik az egyik támasszal ($\psi = 0$). A terhelés Fourier-sora ekkor (21) alapján

$$p(\varphi) = \frac{kP}{\beta_1 l \pi} \sum_{n=0, k, 2k, \dots}^{\infty} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \cos n\varphi. \tag{49}$$



8. ábra. Egyenletesen megoszló, szakaszos vonalerőkkel terhelt, rugalmas ágyazású körgyűrű alakú lemez

Fenti képletben a Σ' jelölés azt jelenti, hogy a végtelen trigonometrikus sor első tagját ($n = 0$) fél értékkel kell számításba venni. Miután a terhelés csak koszinusz függvényeket tartalmaz, a (6) és (9) kifejezésekben a felülvonásos integrálási állandók eltűnnek.

Számítástechnikai szempontból az a és b sugarú körgyűrűalakú lemezt $a \div b_1$ és $b_1 \div b$ sugarúakra bontjuk fel. Utóbbi mennyiségeit megkülönböztetés céljából * jellel látjuk el. Feladatunk n minden értéke esetén nyolc integrálási állandót tartalmaz. Ezek meghatározására ugyanennyi feltételi egyenletet kell felírni. A kerületi feltételek:

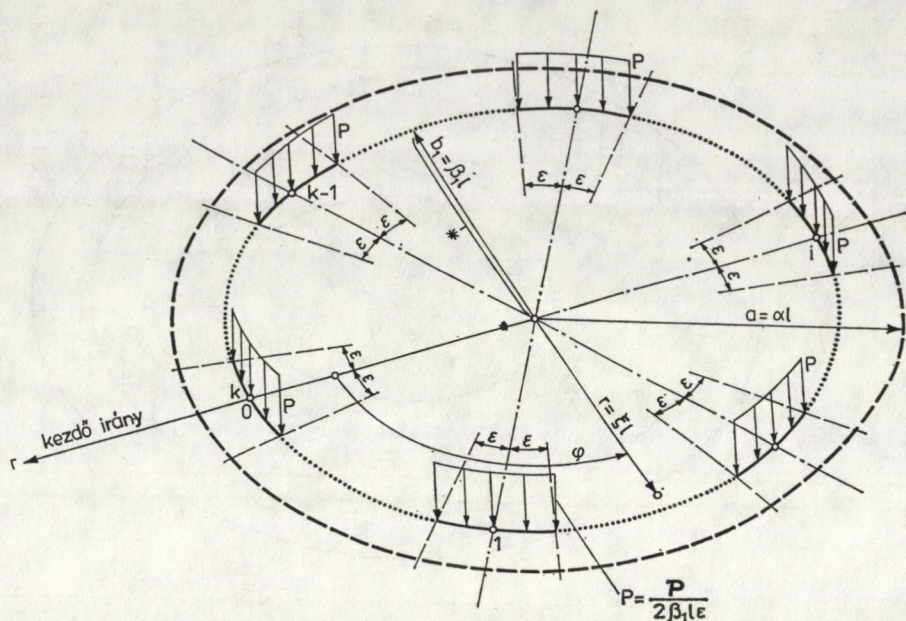
$$\xi = \beta : (35) \dots M_r^* = 0; V_r^* = 0,$$

$$\xi = \beta_1 : (46) \dots w^* - w = 0; \vartheta_r^* - \vartheta_r = 0; M_r^* - M_r = 0; Q_r^* - Q_r = p(\varphi),$$

$$\xi = \alpha : (35) \dots M_r = 0; V_r = 0.$$

A (6) és (9) képletek segítségével előállítjuk a feltételi egyenletrendszert. Az ismeretlenek együtthatóit az I. táblázatban adjuk közre. Az egyenletrendszer megoldása szolgáltatja az integrálási állandókat.

Amennyiben a körgyűrű alakú lemez átmegy körlemezbe ($\beta \rightarrow 0$) a C_n^* és D_n^* integrálási állandók (9. ábra) eltűnnek (32). Ekkor a zérusra redukált egyenletrendszer mátrixa egyszerűbb alakot ölt (II. táblázat). Erre az esetre explicit



9. ábra. Egyenletesen megoszló, szakaszos vonalerőkkel terhelt, rugalmas ágyazású kör alakú lemez

alakban is megadjuk az integrálási állandók kifejezéseit. Ehhez vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned}
 c = & -[(\operatorname{ber}_n \beta)^2 + (\operatorname{bei}_n \beta)^2][(\operatorname{ker}'_n \beta)^2 + (\operatorname{kei}'_n \beta)^2] - \\
 & -[(\operatorname{ker}_n \beta)^2 + (\operatorname{kei}_n \beta)^2][(\operatorname{ber}'_n \beta)^2 + (\operatorname{bei}'_n \beta)^2] + \\
 & + 2(\operatorname{ber}_n \beta \operatorname{kei}_n \beta - \operatorname{bei}_n \beta \operatorname{ker}_n \beta)(\operatorname{ber}'_n \beta \operatorname{kei}'_n \beta - \operatorname{bei}'_n \beta \operatorname{ker}'_n \beta) + \\
 & + 2(\operatorname{ber}_n \beta \operatorname{ker}_n \beta + \operatorname{bei}_n \beta \operatorname{kei}_n \beta)(\operatorname{ber}'_n \beta \operatorname{ker}'_n \beta + \operatorname{bei}'_n \beta \operatorname{kei}'_n \beta) = -\frac{1}{\beta^2}, \\
 c_1 = & \left(\frac{1-\mu}{\alpha^2}\right)^2 (1-n^2)(\operatorname{bei}_n \alpha \operatorname{ker}'_n \alpha - \operatorname{ker}_n \alpha \operatorname{bei}'_n \alpha) + \\
 & + \frac{1-\mu}{\alpha} (\operatorname{ber}'_n \alpha \operatorname{ker}'_n \alpha + \operatorname{bei}'_n \alpha \operatorname{kei}'_n \alpha) - \operatorname{ber}_n \alpha \operatorname{kei}'_n \alpha + \\
 & + \operatorname{kei}_n \alpha \operatorname{ber}'_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha^3} n^2 (\operatorname{ber}_n \alpha \operatorname{ker}_n \alpha + \operatorname{bei}_n \alpha \operatorname{kei}_n \alpha) - \\
 & - \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 (\operatorname{ber}_n \alpha \operatorname{ker}'_n \alpha + \operatorname{bei}_n \alpha \operatorname{kei}'_n \alpha + \operatorname{ker}_n \alpha \operatorname{ber}'_n \alpha + \operatorname{kei}_n \alpha \operatorname{bei}'_n \alpha),
 \end{aligned} \tag{50/1}$$

$$\begin{aligned}
 c_2 = & \left(\frac{1-\mu}{\alpha^2} \right)^2 (n^2 - 1) (\text{bei}_n \alpha \text{kei}'_n \alpha - \text{kei}_n \alpha \text{bei}'_n \alpha) - \\
 & - \frac{1-\mu}{\alpha} (\text{ber}'_n \alpha \text{kei}'_n \alpha - \text{bei}'_n \alpha \text{ker}'_n \alpha) - \text{ber}_n \alpha \text{ker}'_n \alpha + \\
 & + \text{ker}_n \alpha \text{ber}'_n \alpha - \frac{1-\mu}{\alpha^3} n^2 (\text{ber}_n \alpha \text{kei}_n \alpha - \text{ker}_n \alpha \text{bei}_n \alpha) + \\
 & + \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 (\text{ber}_n \alpha \text{kei}'_n \alpha - \text{bei}_n \alpha \text{ber}'_n \alpha - \text{ker}_n \alpha \text{bei}'_n \alpha + \text{kei}_n \alpha \text{ber}'_n \alpha), \\
 c_3 = & \frac{1-\mu}{\alpha} [(\text{ber}'_n \alpha)^2 + (\text{bei}'_n \alpha)^2] + \frac{1-\mu}{\alpha^3} n^3 [(\text{ber}_n \alpha)^2 + (\text{bei}_n \alpha)^2] - \\
 & - 2 \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 (\text{ber}_n \alpha \text{ber}'_n \alpha + \text{bei}_n \alpha \text{bei}'_n \alpha) - \\
 & - \left[\left(\frac{1-\mu}{\alpha^2} n \right)^2 (n^2 - 1) + 1 \right] (\text{ber}_n \alpha \text{bei}'_n \alpha - \text{bei}_n \alpha \text{ber}'_n \alpha).
 \end{aligned} \tag{50/2}$$

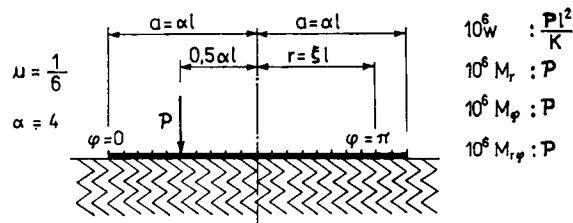
Fenti kifejezésekben c az egyenletrendszer determinánsa. Az (50) alattiak segítségével az integrálási állandók a számítás sorrendjében:

$$\begin{aligned}
 C_n = & \frac{kl^2 \mathbf{P}}{c\beta K\pi} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \left\{ \text{kei}'_n \beta [(\text{ber}_n \beta)^2 + (\text{bei}_n \beta)^2] - \right. \\
 & - \text{ber}'_n \beta (\text{ber}_n \beta \text{kei}_n \beta - \text{bei}_n \beta \text{ker}_n \beta) - \\
 & \left. - \text{bei}'_n \beta (\text{ber}_n \beta \text{ker}_n \beta + \text{bei}_n \beta \text{kei}_n \beta) \right\}, \\
 D_n = & - \frac{kl^2 \mathbf{P}}{c\beta K\pi} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \left\{ \text{ker}'_n \beta [(\text{ber}_n \beta)^2 + (\text{bei}_n \beta)^2] - \right. \\
 & - \text{ber}'_n \beta (\text{ber}_n \beta \text{ker}_n \beta + \text{bei}_n \beta \text{kei}_n \beta) + \\
 & \left. + \text{bei}'_n \beta (\text{ber}_n \beta \text{kei}_n \beta - \text{bei}_n \beta \text{ker}_n \beta) \right\},
 \end{aligned} \tag{51/1}$$

$$A_n = \frac{-C_n c_1 + D_n c_2}{c_3},$$

$$\begin{aligned}
 B_n = & \frac{A_n \left[\text{bei}'_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 \left(\text{ber}'_n \alpha - \frac{\text{ber}_n \alpha}{\alpha} \right) \right] + C_n \left[\text{kei}'_n \alpha + \right.}{\text{ber}'_n \alpha +} \\
 & + \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 \left(\text{ker}'_n \alpha - \frac{\text{ker}_n \alpha}{\alpha} \right) \left. \right] - D_n \left[\text{ker}'_n \alpha - \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 \left(\text{kei}'_n \alpha - \frac{\text{kei}_n \alpha}{\alpha} \right) \right]}{+ \frac{1-\mu}{\alpha} n^2 \left(\text{bei}'_n \alpha - \frac{\text{bei}_n \alpha}{\alpha} \right)},
 \end{aligned}$$

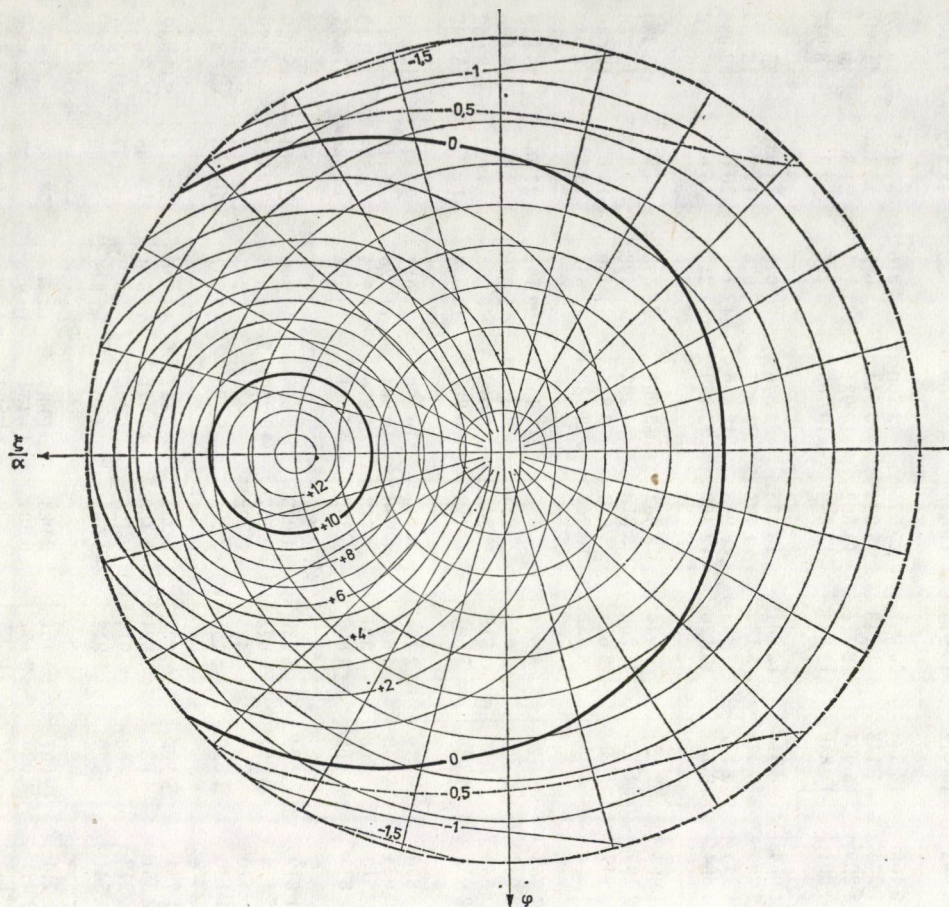
III. táblázat



max n = 28

$\xi : \alpha$ $\varphi : \pi$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
0/12	38 570 0 28 296 0	57 389 -3 925 35 711 0	78 364 -356 50 502 0	100 611 18 282 78 293 0	121 641 69 598 135 230 0	133 219 341 952 277 956 0	119 145 66 618 132 903 0	96 036 11 908 73 015 0	72 629 -10 988 42 350 0	52 036 -20 082 24 492 0	35 339 -22 036 13 753 0
1/12	29 897 0 20 190 -6 457	47 864 -2 232 24 885 -9 280	67 236 1 953 33 040 -14 510	87 023 19 320 44 337 -22 117	104 533 59 089 53 240 -28 056	113 519 116 978 57 035 -6 617	107 389 75 744 51 308 29 145	90 338 24 106 30 953 27 903	70 181 3 513 30 953 19 764	51 249 -15 760 19 417 13 388	35 339 -19 639 11 356 8 947
2/12	11 211 0 7 085 -9 057	27 221 -585 8 248 -11 846	43 506 2 444 9 567 -16 150	59 554 12 307 10 017 -20 547	73 723 30 575 7 695 -21 562	83 012 57 734 8 265 -11 762	84 102 54 372 199 8 758	76 624 34 313 4 585 23 175	63 658 10 603 7 493 24 915	49 029 -5 256 6 878 20 707	35 339 -13 089 4 806 15 497
3/12	-5 300 0 448 -8 766	8 175 -444 67 -10 831	21 266 833 -1 001 -13 718	34 152 4 950 -3 025 -16 631	46 073 13 129 -6 493 -17 919	55 622 26 055 -9 652 -14 575	60 888 32 343 -15 634 -4 873	60 558 30 675 -15 672 7 924	54 896 19 477 -11 694 17 055	45 738 6 026 -7 178 19 690	35 339 -4 142 -4 142 17 895

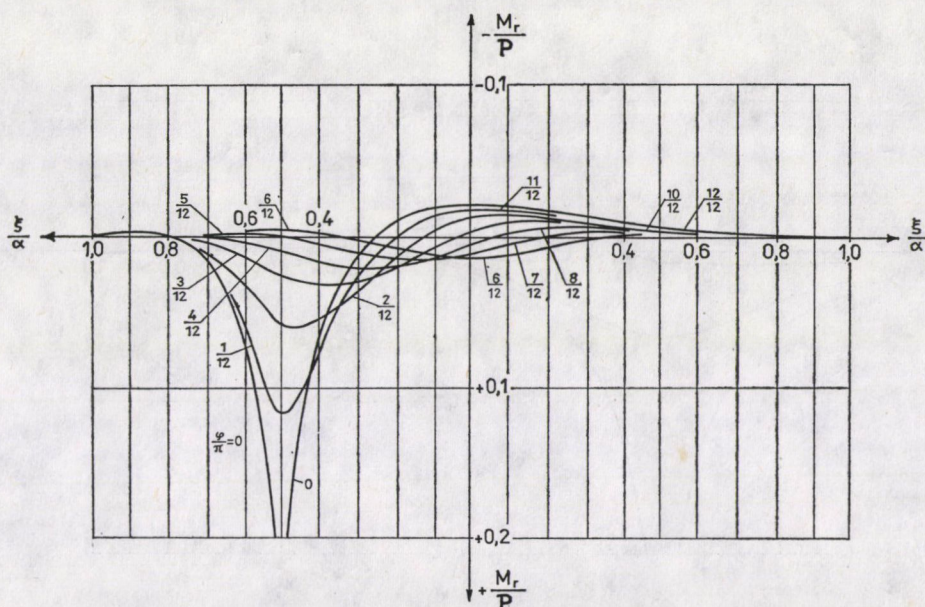
4/12	—14 004 0 —340 —7 040	—3 477 —588 —1 096 —8 662	6 491 —471 —2 671 —10 768	16 448 534 —5 006 —13 092	26 149 3 668 —8 314 —14 972	34 978 7 710 —14 153 —14 914	41 924 16 191 —17 236 —11 473	45 761 20 887 —20 540 —4 160	45 685 19 972 —20 635 5 023	41 843 13 447 —17 519 12 279	35 339 4 806 —13 089 15 497
5/12	—15 754 0 918 —4 870	—8 242 —373 210 —6 229	—1 097 —932 —1 210 —7 855	6 168 —1 544 —3 229 —9 801	13 583 —1 148 —5 984 —11 839	20 992 —1 748 —12 111 —13 343	27 975 5 234 —13 602 —13 359	33 700 10 544 —17 931 —10 765	37 216 14 696 —21 181 —5 106	37 791 15 156 —21 860 2 334	35 339 11 356 —19 639 8 947
6/12	—13 675 0 2 000 —3 014	—8 824 183 1 434 —4 104	—3 949 —779 369 —5 330	1 069 —2 205 —1 145 —6 884	6 414 —3 325 —3 177 —8 733	12 201 —5 142 —7 395 —10 776	18 386 —1 731 —8 943 —12 467	24 576 1 957 —12 856 —12 950	30 070 7 078 —17 107 —11 237	33 936 11 798 —20 631 —6 685	35 339 13 753 —22 036 0
7/12	—10 422 0 2 320 —1 878	—7 600 740 1 884 —2 616	—4 387 —429 1 173 —3 452	—1 064 —2 195 147 —4 581	2 625 —4 085 —1 180 —6 059	6 948 —5 268 —2 621 —8 031	12 082 —5 818 —5 032 —10 266	18 009 —4 292 —7 854 —12 338	24 393 —498 —11 460 —13 548	30 516 5 253 —15 673 —12 748	35 339 11 356 —19 639 —8 947
8/12	—7 431 0 2 037 —1 429	—5 928 925 1 719 —1 768	—3 888 —252 1 276 —2 237	—1 763 —2 042 632 —2 953	721 —4 208 —139 —4 019	3 894 —4 653 513 —5 604	8 056 —7 984 —2 343 —7 718	13 454 —8 413 —3 918 —10 286	20 101 —6 828 —6 055 —13 038	27 664 —2 454 —9 071 —15 217	35 339 4 806 —13 089 —15 497
9/12	—5 185 0 1 472 —1 319	—4 383 577 1 276 —1 321	—3 184 —424 1 005 —1 497	—1 880 —2 025 618 —1 873	—219 —4 143 208 —2 568	2 136 —4 847 1 381 —3 667	5 544 —8 990 —748 —5 332	10 409 —10 904 —1 216 —7 691	17 017 —11 526 —1 725 —10 762	25 441 —9 710 —2 537 —14 385	35 339 —4 142 —4 142 —17 895
10/12	—3 700 0 892 —1 150	—3 165 —144 821 —976	—2 576 —866 645 —981	—1 819 —2 179 410 —1 130	—684 —4 091 189 —1 530	1 139 —6 072 485 —2 181	4 038 —9 377 72 —3 286	8 486 —12 279 435 —5 026	14 960 —14 648 1 295 —7 527	23 861 —15 454 2 767 —10 990	35 339 —13 089 4 806 —15 497
11/12	—2 866 0 475 —695	—2 379 —847 502 —542	—2 179 —1 316 370 —503	—1 744 —2 381 212 —541	—902 —4 085 68 —720	622 —7 521 —914 —1 012	3 235 —9 488 426 —1 553	7 427 —12 941 1 296 —2 466	13 786 —16 398 3 039 —3 845	22 919 —19 085 6 167 —5 908	35 339 —19 639 11 356 —8 947
12/12	—2 597 0 324 0	—2 106 —1 135 390 0	—2 041 —1 504 270 0	—1 714 —2 471 135 0	—967 —4 090 9 0	461 —8 157 —1 555 0	2 983 —9 507 520 0	7 089 —13 134 1 560 0	13 404 —16 958 3 605 0	22 607 —20 322 7 332 0	35 339 —22 036 13 753 0



10. ábra. Negyedpontjában \mathbf{P} koncentrált erővel terhelt, rugalmas ágyazású körlemez lehajlás görbéi, a negyedpont lehajlási (w) hatásfelülete. Szorzó: $10^{-2} \mathbf{P} l^2 / K$; $\alpha = 4$; $\mu = 1/6$

$$A_n^* = A_n - \frac{kl^2 \mathbf{P}}{c\beta K\pi} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \left\{ \text{bei}'_n \beta [(\ker_n \beta)^2 + (\text{kei}_n \beta)^2] + \right. \\ \left. + \ker'_n \beta (\text{ber}_n \beta \text{kei}_n \beta - \text{bei}_n \beta \ker_n \beta) - \right. \\ \left. - \text{kei}'_n \beta (\text{ber}_n \beta \ker_n \beta + \text{bei}_n \beta \text{kei}_n \beta) \right\},$$

$$B_n^* = B_n + \frac{kl^2 \mathbf{P}}{c\beta K\pi} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \left\{ \text{ber}'_n \beta [(\ker_n \beta)^2 + (\text{kei}_n \beta)^2] - \right. \\ \left. - \ker'_n \beta (\text{ber}_n \beta \ker_n \beta + \text{bei}_n \beta \text{kei}_n \beta) - \right. \\ \left. - \text{kei}'_n \beta (\text{ber}_n \beta \text{kei}_n \beta - \text{bei}_n \beta \ker_n \beta) \right\}. \quad (51/2)$$

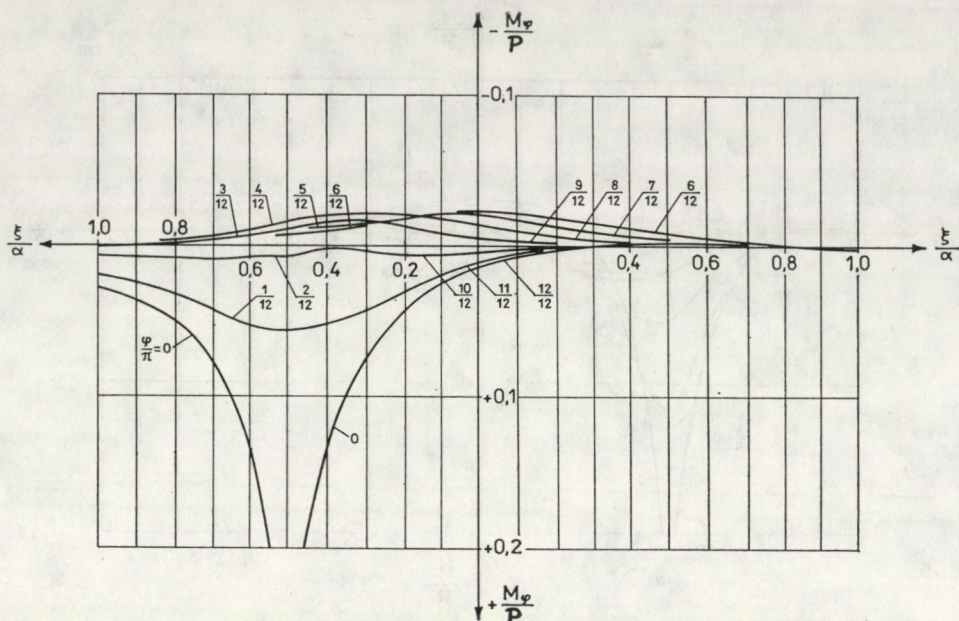


11. ábra. Negyedpontjában P koncentrált erővel terhelt, rugalmas ágyazású körlemez sugárirányú nyomatékainak (M_r) ábrái

Számpéldaként határozzuk meg annak a rugalmas ágyazású körlemeznek a lehajlásait és nyomatékait, amelyet negyedpontjában egy koncentrált P erő támad ($k = 1$; $\varepsilon = 0$; $\alpha = 4$; $\beta_1 = 2$; $\mu = 1/6$). A végeredményt a III. táblázatban adjuk közre. A statikai mennyiségek számításai során a Fourier-soroknak 28 tagját (max. $n = 28$) vettük figyelembe. A koncentrált erő támadáspontjában végtelen nagy sugárirányú (M_r) és érintőirányú (M_φ) nyomatékok ébrednek, ugyanakkor a táblázatban véges értékeket találunk. Ez annak az eredménye, hogy a végtelen trigonometrikus sornak csak véges számú tagját vettük figyelembe. A III. táblázat számértékei a többi pontban pontosaknak tekinthetők, mivel sorfejtéskor a számítógép megvizsgálta, hogy a következő kiszámított tag befolyásolja-e a kinyomtatásra kerülő utolsó számjegyet. Amennyiben már nem változtatta meg, akkor a gép leállt és további tagokat nem számolt.

Az alakváltozások érzékeltetése céljából megrajzoltuk a számított lemez lehajlási görbéit (10. ábra). Ez egyben a negyedpont lehajlási hatásfelülete, amelyet k_0 -al szorozva (2) a talajreakció hatásfelületét kapjuk. Az ábrából látható, hogy a lemez egy csekély része felemelkedik. Ez a rugókon való felfekvés következménye, a valóságban azonban nem fordulhat elő. A gyakorlatban egyéb teherhatások (önsúly stb.) azt eredményezik, hogy negatív reakcióerőkkel nem kell számolni.

A 11., 12. és 13. ábrák a nyomatékok lefutását szemléltetik a különböző lemezátmérők mentén. A rugalmas ágyazás csillapító hatása a támadásponttól távolodva nagyon jól érzékelhető.



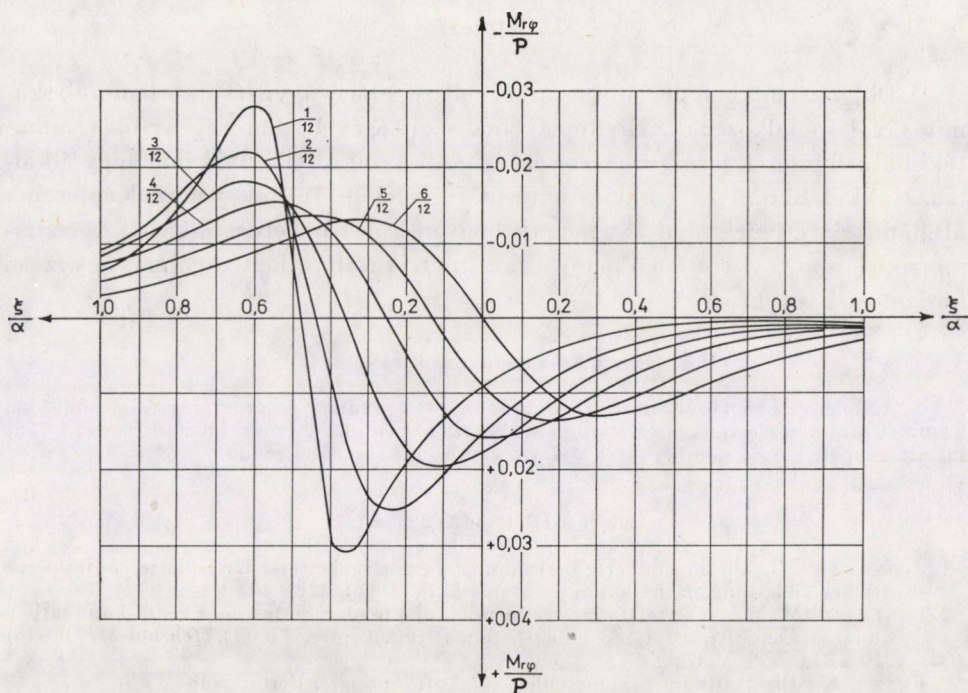
12. ábra. Negyedpontjában \mathbf{P} koncentrált erővel terhelt, rugalmas ágyazású körlemez érintőirányú nyomatékainak (M_φ) ábrái

Amennyiben a szakaszosan ható vonalerők a lemez peremét támadják (14. ábra), az integrálási állandók meghatározására szolgáló képletek tovább egyszerűsödnek:

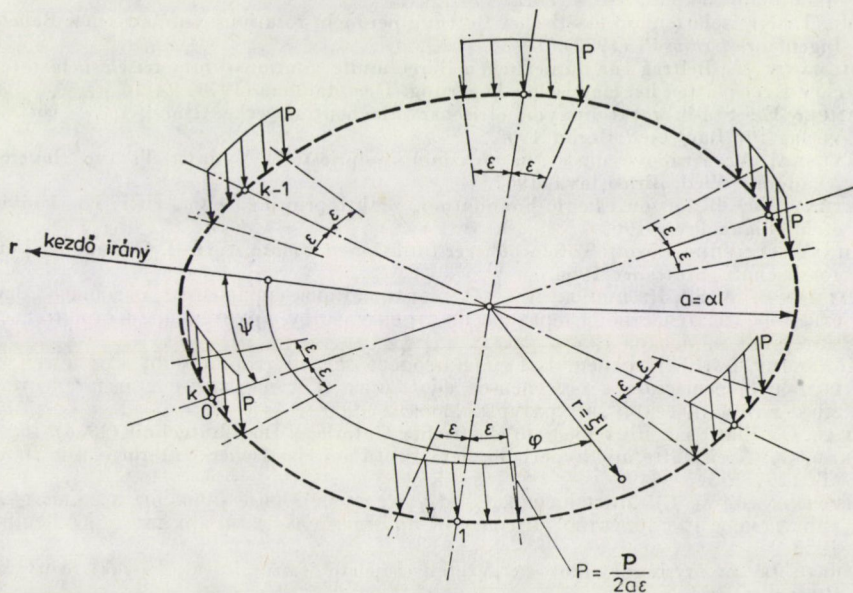
$$\begin{aligned} A_n &= \frac{kl^2 \mathbf{P}}{\alpha K \pi} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \frac{c_4}{c_1 c_4 - c_2 c_3}, \\ B_n &= \frac{kl^2 \mathbf{P}}{\alpha K \pi} \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \frac{c_3}{c_1 c_4 - c_2 c_3}. \end{aligned} \quad (52)$$

Itt

$$\begin{aligned} c_1 &= \text{bei}'_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 \left(\text{ber}'_n \alpha - \frac{\text{ber}_n \alpha}{\alpha} \right), \\ c_2 &= \text{ber}'_n \alpha - \frac{1-\mu}{\alpha^2} n^2 \left(\text{bei}'_n \alpha - \frac{\text{bei}_n \alpha}{\alpha} \right), \\ c_3 &= \text{bei}_n \alpha + \frac{1-\mu}{\alpha} \left(\text{ber}'_n \alpha - \frac{n^2 \text{ber}_n \alpha}{\alpha} \right), \\ c_4 &= \text{ber}_n \alpha - \frac{1-\mu}{\alpha} \left(\text{bei}'_n \alpha - \frac{n^2 \text{bei}_n \alpha}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (53)$$



13. ábra. Negyedpontjában P koncentrált erővel terhelt, rugalmas ágyazású körlemez csavarányomatékainak ($M_{r\varphi}$) ábrái



14. ábra. Pereme mentén egyenletesen megoszló szakaszos vonalerőkkel terhelt, rugalmas ágyazású kör alakú lemez

7. Befejezés

Dolgozatunkban periodikusan terhelt rugalmas ágyazású körlemezek számításával foglalkoztunk. Eredményeink segítségével lehetőség nyílik nyomtatói hatásfelületek megszerkesztésére is, ami azzal az előnnyel jár, hogy alkalmazásukkal bármilyen terhelés hatását figyelembe tudjuk venni. Képleteink általános érvényűek, ami azt jelenti, hogy $n = 0$ -t behelyettesítve a körszimmetrikusan, $n = 1$ esetében pedig az antiszimmetrikusan terhelt rugalmas ágyazású körlemezre kapjuk.

Köszönetnyilvánítás

A dolgozatban közölt, numerikus példánál a számítási és programozási feladatokat FEHÉR Katalin matematikus és PAULERNÉ SZEILER Éva okl. mérnök látta el Siemens 7755 számítógéppel. Kiváló munkájukért a szerző ezúton is köszönetet mond.

IRODALOM

1. ACKERMANN, G.: Die angenäherte Berechnung elastisch gebetteter Kreisplatten unter periodischer Belastung. *Bauplanung — Bautechnik* (1966), 428—433
2. BANERJEE, M. M.: Note on Large Deflections of Circular Plates on Elastic Foundations under a Concentrated Load at a Distance from Centre. *IE (1). Journal-ME* (1976), 210—214
3. BEYER, K.: Die Statik im Stahlbetonbau, 2. Aufl. Springer, Berlin 1948
4. BERGFELDER, J.: Berechnung von Platten veränderlicher Steifigkeit nach dem Differenzenverfahren. *Konstruktiver Ingenieurbau-Berichte*. Heft 4. Vulkan-Verlag, Dr. W. Classen Nachf. GmbH. & Co KG, Essen
5. DWIGHT, H. B.: Tables of Integrals and Other Mathematical Data, Fourth Edition. The Macmillan Company, New York, 1961
6. EIBL, J.: Kreisplatten auf elastischer Bettung bei nicht rotationssymmetrischer Belastung. *Ingenieur-Archiv* 43 (1973), 1—8
7. FRIEMANN, H.: Beitrag zur numerischen Berechnung rotationssymmetrisch belasteter dicker Kreisplatten bei elastischer Lagerung. *Der Stahlbau* (1974) 9—16
8. HAMPE, E.: Statik rotationssymmetrischer Flächentragwerke. Band 1. 3. Aufl. VEB Verlag für Bauwesen Berlin 1968.
9. HANUSKA, A.: Kruhové dosky na pružnom polpriestore. Vydavateľ's tvo slovenskej Akadémie Vied, Bratislava 1957.
10. HETÉNYI, M.: Beams on Elastic Foundation. Eighth printing. Ann Arbor: The University of Michigan Press 1967.
11. JAHNKE—EMEDE—LÖSCH: Tafeln höherer funktionen. Siebte Aufl. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1966.
12. (KALMANOK, A. S.), Калманок, А. С.: Расчет пластинок-справочное пособие. Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, Москва 1959
13. (KORENJEV, B. G.): Корнев, Б. Г.: Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. Государственное издательство физико-математической литературы. Москва 1960
14. LIKAR, O.: Platte mit Einzellast auf elastischer Unterlage. *Die Bautechnik* (1974), 160—169
15. LIKAR, O.: Kreisplatte mit hyperbolischem Profil auf elastischer Unterlage. *Die Bautechnik* (1975), 343—349
16. (LITWINENKO, W. I.): Литвиненко, В. И.: Железобетонные бункеры и силосы. Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, Ленинград 1953
17. MÁRKUS Gy.: Körszimmetrikus szerkezetek elmélete és számítása, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1964
18. MÁRKUS, Gy.: Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke. Akadémiai Kiadó, Budapest—Werner Verlag, Düsseldorf. 1967, 1976, 1978.

19. MÁRKUS, Gy.: Kreis- und Kreisringplatten unter antimetrischer Belastung. Akadémiai Kiadó, Budapest. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn. Berlin (München) Düsseldorf 1973
20. (MÁRKUS, Gy.): Маркус, Д.: Круглые и кольцевые плиты при обратнoсимметричном нагружении. Москва Стройиздат 1977
21. MÁRKUS, Gy.: Periodikusan terhelt kör- és körgyűrű alakú lemezek különös tekintettel az alapozásokra, MÉLYÉPTERV (1978) Kézirat.
22. MÁRKUS, Gy.: Kreis- und Kreisringplatten unter periodischer Belastung. Akadémiai Kiadó. Budapest — Werner Verlag, Düsseldorf 1983
23. (NOSOWA, L. N.): Носова, Л. Н.: Таблицы функций Томсона и их производных. Издательство Академии Наук СССР. Москва 1960
24. RADUART, A.: Entwurf eines ringförmigen Fundamentträgers auf elastischer Unterlage. ECE/EIB 1 (1971), 30—38
25. OVECSKIN, A. M.: Kör alakú vasbeton medencék statikai számítása. Tankönyvkiadó, Budapest 1952
26. SCHIKORA, K.: Berechnung beliebig belasteter Kreisplatten mit veränderlicher Steifigkeit auf elastischem Halbraum. Bauingenieur 53 (1978), 391—394
27. RAUHAUS, D.: Tabellen zur Berechnung der Kreisplatte auf elastischer Unterlage mit zentrosymmetrischer Belastung. Bauingenieur 52 (1977), 387—392
28. SCHLEICHER, F.: Kreisplatten auf elastischer Unterlage. Springer, Berlin 1926
29. SZILÁRD, R.: Theory and Analysis of Plates. Prenticehall, Inc. Englewood Cliffs. New Jersey 1974.
30. TIMOSHENKO—WOINOWSKY—KRIEGER: Theory of Plates and Shells. 2. Ed. Mc Graw-Hill Book Company. New York 1959
31. (WAJNBERG, D. W.—WAJNBERG, E. D.): Вайнберг, Д. В.—Вайнберг, Е. Д.: Пластины, диски, балки-стенки. Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре УССР. Киев 1959

FÜGGELÉK

Az n -ed rendű Thomson-függvények sorai

$$\text{ber}_n x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}}{p! (n+p)!} \cos \frac{n+2p}{4} \pi,$$

$$\text{ber}'_n x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p} \frac{n+2p}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p-1}}{p! (n+p)!} \cos \frac{n+2p}{4} \pi,$$

$$\text{ber}''_n x = -\text{bei}_n x - \frac{\text{ber}'_n x}{x} + \frac{n^2 \text{ber}_n x}{x^2},$$

$$\text{ber}'''_n x = \frac{\text{bei}_n x}{x} - \text{bei}'_n x + \frac{2+n^2}{x^2} \text{ber}'_n x - \frac{3n^2}{x^3} \text{ber}_n x.$$

$$\text{bei}_n x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p-1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}}{p! (n+p)!} \sin \frac{n+2p}{4} \pi,$$

$$\text{bei}'_n x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p+1} \frac{n+2p}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p-1}}{p! (n+p)!} \sin \frac{n+2p}{4} \pi,$$

$$\text{bei}''_n x = \text{ber}_n x - \frac{\text{bei}'_n x}{x} + \frac{n^2 \text{bei}_n x}{n^2},$$

$$\text{bei}'''_n x = -\frac{\text{ber}_n x}{x} + \text{ber}'_n x + \frac{2+n^2}{x^2} \text{bei}'_n x - \frac{3n^2}{x^3} \text{bei}_n x.$$

$$\begin{aligned}\ker_n x &= \frac{\pi}{4} \operatorname{bei}_n x - \ln \frac{\gamma x}{2} \operatorname{ber}_n x + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+p}(n-p-1)!}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n} \cos \frac{n+2p}{4} \pi + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+p}\right) \times \\ &\times \frac{(-1)^{n+p} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}}{p! (n+p)!} \cos \frac{n+2p}{4} \pi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ker'_n x &= \frac{\pi}{4} \operatorname{bei}'_n x - \ln \frac{\gamma x}{2} \operatorname{ber}'_n x - \frac{\operatorname{ber}_n x}{x} + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+p}(2p-n)(n-p-1)!}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n-1} \cos \frac{n+2p}{4} \pi + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{p=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+p}\right) \times \\ &\times \frac{(-1)^{n+p}(n+2p)}{p! (n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p-1} \cos \frac{n+2p}{4} \pi,\end{aligned}$$

$$\ker''_n x = -\operatorname{kei}_n x - \frac{\ker'_n x}{x} + \frac{n^2 \ker_n x}{x^2},$$

$$\ker'''_n x = \frac{\operatorname{kei}_n x}{x} - \operatorname{kei}'_n x + \frac{2+n^2}{x^2} \ker'_n x - \frac{3n^2}{x^3} \ker_n x.$$

$$\ln \gamma = 0,577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 607$$

(Euler—Mascheroni féle szám).

$$\begin{aligned}\operatorname{kei}_n x &= -\frac{\pi}{4} \operatorname{ber}_n x - \ln \frac{\gamma x}{2} \operatorname{bei}_n x + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+p}(n-p-1)!}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n} \sin \frac{n+2p}{4} \pi + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+p}\right) \times \\ &\times \frac{(-1)^{n+p+1}}{p! (n-p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \sin \frac{n+2p}{4} \pi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{kei}'_n x &= -\frac{\pi}{4} \operatorname{ber}'_n x - \ln \frac{\gamma x}{2} \operatorname{bei}'_n x - \frac{\operatorname{bei}_n x}{x} + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+p}(2p-n)(n-p-1)!}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n-1} \sin \frac{n+2p}{4} \pi + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{p=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+p}\right) \times \\ &\times \frac{(-1)^{n+p+1}}{p! (n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p-1} \sin \frac{n+2p}{4} \pi,\end{aligned}$$

$$\operatorname{kei}''_n x = \operatorname{ker}_n x - \frac{\operatorname{kei}'_n x}{x} + \frac{n^2 \operatorname{kei}_n x}{x^2},$$

$$\operatorname{kei}'''_n x = -\frac{\operatorname{ker}_n x}{x} + \operatorname{ker}'_n x + \frac{2+n^2}{x^2} \operatorname{kei}'_n x - \frac{3n^2}{x^3} \operatorname{kei}_n x.$$

Az n-ed rendű Thomson-függvények közelítő értékei

$f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
$\text{ber}_n x$	$\frac{\exp(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2}\pi x} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right)$	$\frac{(-1)^n}{n!} \left[\left(\frac{x}{2}\right)^n \cos \frac{n\pi}{4} - \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} \cos \frac{n+2}{4} \pi \right]$
$\text{bei}_n x$	$\frac{\exp(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2}\pi x} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right)$	$-\frac{(-1)^n}{n!} \left[\left(\frac{x}{2}\right)^n \sin \frac{n\pi}{4} - \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} \sin \frac{n+2}{4} \pi \right]$
$\text{ker}_n x$	$\sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right)$	$\frac{(-1)^n}{2} (n-2)! \left[(n-1) \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \cos \frac{n\pi}{4} - \left(\frac{x}{2}\right)^{2-n} \cos \frac{n+2}{4} \pi \right]$
$\text{kei}_n x$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right)$	$\frac{(-1)^n}{2} (n-2)! \left[(n-1) \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sin \frac{n\pi}{4} - \left(\frac{x}{2}\right)^{2-n} \sin \frac{n+2}{4} \pi \right]$
$\text{ber}'_n x$	$\frac{\exp(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2}\pi x} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right)$	$\frac{(-1)^n}{2n!} \left[n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \cos \frac{n\pi}{4} - \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} \cos \frac{n+2}{4} \pi \right]$
$\text{bei}'_n x$	$\frac{\exp(x/\sqrt{2})}{\sqrt{2}\pi x} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right)$	$-\frac{(-1)^n}{2n!} \left[n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \sin \frac{n\pi}{4} - \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} \sin \frac{n+2}{4} \pi \right]$
$\text{ker}'_n x$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right)$	$-\frac{(-1)^n}{4} (n-2)! \left[n(n-1) \left(\frac{x}{2}\right)^{-n-1} \cos \frac{n\pi}{4} - (n-2) \left(\frac{x}{2}\right)^{1-n} \cos \frac{n+2}{4} \pi \right]$
$\text{kei}'_n x$	$\sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}\right)$	$-\frac{(-1)^n}{4} (n-2)! \left[n(n-1) \left(\frac{x}{2}\right)^{-n-1} \sin \frac{n\pi}{4} - (n-2) \left(\frac{x}{2}\right)^{1-n} \sin \frac{n+2}{4} \pi \right]$

Thomson-függvények közelítő értékei

n	$\text{ber}_n x$	$\text{bei}_n x$	$\text{ber}'_n x$	$\text{bei}'_n x$
0	1	$\frac{x^2}{4}$	$-\frac{x^3}{16}$	$\frac{x}{2}$
1	$-\frac{x}{2\sqrt{2}}$	$\frac{2}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$
2	$\frac{1}{3!} \left(\frac{x}{2}\right)^4$	$-\frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2$	$\frac{2}{3!} \left(\frac{x}{2}\right)^3$	$-\frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)$
3	$-\frac{1}{3!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^3$	$\frac{1}{3!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^3$	$-\frac{1}{2 \cdot 2!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^2$	$\frac{1}{2 \cdot 2!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^2$
4	$-\frac{1}{4!} \left(\frac{x}{2}\right)^4$	$-\frac{1}{5!} \left(\frac{x}{2}\right)^6$	$-\frac{1}{2 \cdot 3!} \left(\frac{x}{2}\right)^3$	$-\frac{3}{5!} \left(\frac{x}{2}\right)^5$
5	$\frac{1}{5!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^5$	$-\frac{1}{5!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^5$	$\frac{1}{2 \cdot 4!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^4$	$-\frac{1}{2 \cdot 4!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^4$
6	$-\frac{1}{7!} \left(\frac{x}{2}\right)^8$	$\frac{1}{6!} \left(\frac{x}{2}\right)^6$	$-\frac{4}{7!} \left(\frac{x}{2}\right)^7$	$\frac{1}{2 \cdot 5!} \left(\frac{x}{2}\right)^5$
7	$-\frac{1}{7!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^7$	$-\frac{1}{7!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^7$	$-\frac{1}{2 \cdot 6!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^6$	$-\frac{1}{2 \cdot 6!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^6$
8	$\frac{1}{8!} \left(\frac{x}{2}\right)^8$	$\frac{1}{9!} \left(\frac{x}{2}\right)^{10}$	$\frac{1}{2 \cdot 7!} \left(\frac{x}{2}\right)^7$	$\frac{5}{9!} \left(\frac{x}{2}\right)^9$
9	$-\frac{1}{9!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^9$	$\frac{1}{9!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^9$	$-\frac{1}{2 \cdot 8!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^8$	$\frac{1}{2 \cdot 8!\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^8$
10	$\frac{1}{11!} \left(\frac{x}{2}\right)^{12}$	$-\frac{1}{10!} \left(\frac{x}{2}\right)^{10}$	$\frac{6}{11!} \left(\frac{x}{2}\right)^{11}$	$-\frac{1}{2 \cdot 9!} \left(\frac{x}{2}\right)^9$

x igen kicsi argumentumaira

$\ker_n x$	$\text{kei}_n x$	$\ker'_n x$	$\text{kei}'_n x$
$-\ln \frac{\gamma x}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{1}{x}$	$-\frac{x}{2} \ln \frac{\gamma x}{2}$
$-\frac{1}{x\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{x\sqrt{2}}$	$\frac{1}{x^2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{x^2\sqrt{2}}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-2}$	$-\frac{\pi}{16} x$	$-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-3}$
$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-3}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-3}$	$-\frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-4}$	$\frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-4}$
$-\frac{3!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-4}$	$\left(\frac{x}{2}\right)^{-2}$	$3! \left(\frac{x}{2}\right)^{-5}$	$-\left(\frac{x}{2}\right)^{-3}$
$\frac{4}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-5}$	$\frac{4!}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-5}$	$-\frac{5!}{4\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-6}$	$-\frac{5!}{4\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-6}$
$-\frac{4!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-4}$	$-\frac{5!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-6}$	$4! \left(\frac{x}{2}\right)^{-5}$	$\frac{6!}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^{-7}$
$-\frac{6!}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-7}$	$\frac{6}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-7}$	$\frac{7!}{4\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-8}$	$-\frac{7!}{4\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-8}$
$\frac{7!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-8}$	$-\frac{6!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-6}$	$-\frac{8!}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^{-9}$	$\frac{3 \cdot 6!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-7}$
$-\frac{8!}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-9}$	$-\frac{8!}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-9}$	$\frac{9!}{4\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-10}$	$\frac{9!}{4\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-10}$
$\frac{8!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-8}$	$\frac{9!}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-10}$	$-2 \cdot 8! \left(\frac{x}{2}\right)^{-9}$	$-\frac{10!}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^{-11}$

Összefüggések magasabb és alacsonyabb rendű Thomson-függvények között

$$\begin{aligned}
 \text{ber}_{n+1} x &= -\frac{n\sqrt{2}}{x} (\text{ber}_n x - \text{bei}_n x) - \text{ber}_{n-1} x, \\
 \text{ber}'_{n+1} x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\text{ber}_n x + \text{bei}_n x) - \frac{n+1}{n} \text{ber}_{n+1} x, \\
 \text{bei}_{n+1} x &= -\frac{n\sqrt{2}}{x} (\text{ber}_n x + \text{bei}_n x) - \text{bei}_{n-1} x, \\
 \text{bei}'_{n+1} x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\text{ber}_n x - \text{bei}_n x) - \frac{n+1}{x} \text{bei}_{n+1} x, \\
 \text{ker}_{n+1} x &= -\frac{n\sqrt{2}}{x} (\text{ker}_n x - \text{kei}_n x) - \text{ker}_{n-1} x, \\
 \text{ker}'_{n+1} x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\text{ker}_n x + \text{kei}_n x) - \frac{n+1}{x} \text{ker}_{n+1} x, \\
 \text{kei}_{n+1} x &= -\frac{n\sqrt{2}}{x} (\text{ker}_n x + \text{kei}_n x) - \text{kei}_{n-1} x, \\
 \text{kei}'_{n+1} x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\text{ker}_n x - \text{kei}_n x) - \frac{n+1}{x} \text{kei}_{n+1} x.
 \end{aligned}$$

Circular Plates on Elastic Foundation Submitted to Periodic Load. — Thin isotropic circular plates of constant thickness on an elastic Foundation, submitted to periodic load, are dealt with. The theory presented permits to analytically determine the deformations and stresses induced by such loads, applied along a circular arc, whose Fourier-series is familiar.

Elastisch gebettete Kreisplatten mit periodischer Belastung. — Behandelt werden periodisch belastete elastisch gebettete, dünne, isotrope Kreisplatten konstanter Dicke. Mit Hilfe der vorgeführten Theorie können alle Verformungen und Beanspruchungen ermittelt werden, die durch eines Kreisbogens entlang angewandten Belastungen hervorgerufen worden sind, deren Fouriersche Reihe bekannt ist.

ANALITIKUS MÓDSZER LEMEZEK ÖRVÉNYÁRAMVESZTESÉGÉNEK KÖZELÍTŐ SZÁMÍTÁSÁRA

KERÉNYI DÉNES*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. január 2-án]

Bevezetés

A nagyteljesítményű villamosgépek (elsősorban a nagy transzformátorok) tervezésekor fontos feladat a fém szerkezeti részekben szórt mágneses fluxus hatására keletkező örvényáramveszteségek meghatározása. Ezeknek a veszteségeknek a „pontos” számítására csak a numerikus számítógépes módszerek adnak lehetőséget [pl. 1, 2]. Gyakorlati számítások végzésekor azonban a valószínű fizikai képet — a mágneses permeabilitásnak a térerősségtől való függését, a szerkezeti részek három dimenziós voltát és pontos alakját, az örvényáramok visszahatását — még a numerikus eljárások is csak kisebb-nagyobb elhanyagolásokkal tudják figyelembe venni [pl. 3]. Egyszerű alakú fémrészek (téglalap keresztmetszetű vezető sínek, téglatestek, lemezek) örvényáramveszteségeit analitikus módszerrel is számíthatjuk. Az így kapott formulák egyrészt gyorsabbá, könnyebbé teszik a veszteségek meghatározását, másrészt feltárják a jelenséget befolyásoló tényezők szerepét [pl. 4, 5].

Ebben a dolgozatban téglalap alakú lemezek örvényáramveszteségeinek közelítő számítására szolgáló analitikus eljárást mutatunk be. A számításban a lemezre merőleges irányú mágneses térerősséget vesszük adottnak, de ezt a mezőt nem a lemez felületén tekintjük rögzítettnek, hanem egy tőle adott távolságban levő, vele párhuzamos és vele azonos méretű síklapon. A térerősség a téglalap egyik oldalával párhuzamos egyenes mentén tetszőlegesen változhatik, a lemez szélén azonban zérus értékű, a téglalap másik oldalával párhuzamos egyenes mentén pedig állandó. A térerősség időben szinuszosan változik.

A lemezek a villamosgépeknek gyakori szerkezeti elemei, örvényáramveszteségük számításával több cikk foglalkozik [pl. 1, 6, 7]. Módszerünket az irodalomból ismert eljárásoktól elsősorban az alábbi tulajdonságai különböztetik meg:

a) A módszer figyelembe veszi az örvényáramoknak a lemez vastagsági mérete mentén való megoszlását, így *véges vastagságú* lemezek számítására alkalmas. (Az [1] alatti numerikus eljárással pl. csak vékony, egy áramréteggel helyettesíthető lemezek számíthatók).

* Dr. Kerényi Dénes, Ganz Villamossági Művek (1024 Budapest II., Lövház utca 39.).

b) A mágneses térerősség értékét a lemeztől adott távolságban levő, a lemezzel párhuzamos sík mentén lehet rögzíteni, így a valóságos viszonyokat jobban tudjuk leképezni. Ez újdonság az eddig ismert és a gyakorlatban használt eljárásokkal szemben (a [6] -ban és [7] -ben ismertetett módszer a térerősséget a lemez felületén rögzíti).

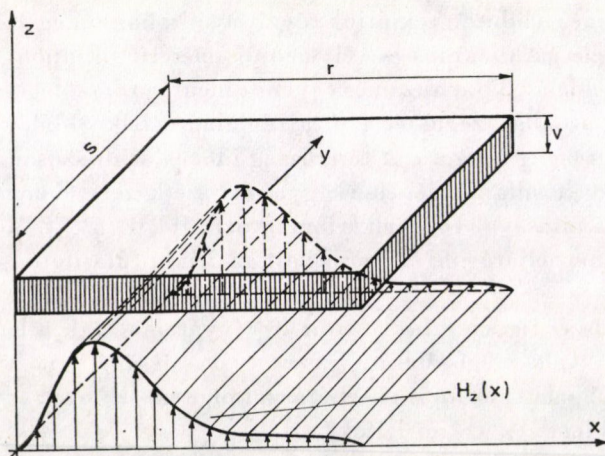
A lemez veszteségét a Maxwell egyenletekből kiindulva, de több közelítő feltételt bevezetve határozzuk meg. A módszer pontossága azon múlik, mennyire teljesülnek ezek a közelítő feltételek a valóságban. Ha a számítás alapjául szolgáló fizikai kép a valóságos képnek nagyjából megfelel, akkor a számított veszteségek a gyakorlati igényeket kielégítő pontossággal közelítik meg a valóságos — mért — veszteségeket.

Analitikus módszerünk — megfelelő korrekcióval — koncentrikus tekercsek szórt terében levő lemezek veszteségének számítására is használható. Erre a célra való alkalmazhatóságát úgy vizsgáljuk meg, hogy az analitikus számítás eredményeit egy kevesebb elhanyagolással élő, ezért pontosabb numerikus eljárás eredményeivel hasonlítjuk össze. Az összehasonlítás a lemezen belüli térerősség-, örvényáramsűrűség- és veszteségmegoszlás tanulmányozását is lehetővé teszi.

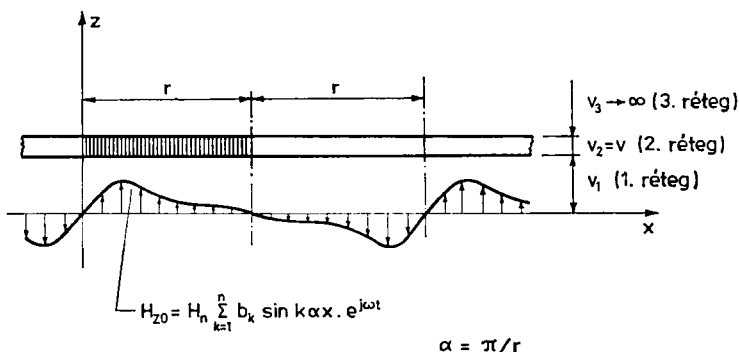
1. A módszer ismertetése

Az 1. ábra szerinti lemez örvényáramveszteségeinek számítását a 2. ábrán látható *háromréteges síkmodell* számítására vezetjük vissza. Feltételezzük, hogy az első réteg szélén, a $z = 0$ egyenes mentén a térerősség x függvényében periodikusan, a

$$H_{z0} = H_m \sum_{k=1}^n b_k \sin k\pi x e^{j\omega t} \quad (1)$$



1. ábra. Lemez mágneses térben



2. ábra. A számítás alapjául szolgáló háromréteges síkmodell

összefüggés szerint változik, ahol $\alpha = \pi/r$ a térbeli váltakozás alapharmonikusának, $\omega = 2\pi f$ pedig az időbeli (szinuszos) váltakozásnak a körfrekvenciája (r [m] a vizsgálni kívánt lemez x irányú mérete, f [1/s] pedig az időbeli váltakozás frekvenciája). A b_k Fourier együtthatókat úgy kell megválasztanunk, hogy az r szakasz fölött a kívánt térerősségmegoszlást kapjuk. Az első és a második réteg véges vastagságú — vastagságuk v_1 [m], ill. v_2 [m] —, a harmadik réteget azonban igen nagy vastagságúnak feltételezzük ($v_3 \rightarrow \infty$). A három réteg x irányban és a 2. ábra síkjára merőleges y irányban végtelen kiterjedésű, ez utóbbi irányban a térerősség térben nem változik.

A továbbiakban meghatározzuk a végtelen kiterjedésű rétegeknek x irányban r hosszúságú (vagyis a térerősséggörbe egy térbeli félperiódusa alá eső), y irányban pedig egységnyi hosszú darabjában keletkező örvényáramvesztéset. Ebből az y irányban véges s hosszúságú lemez veszteségét egy korábbi munkában [5] megállapított tényezővel való szorzással számítjuk. A középső rétegnek $r \times s$ méretű szakaszában keletkező veszteséget tekintjük az 1. ábra szerinti lemez veszteségeinek. Ezenkívül még az alábbi közelítésekkel élünk:

a) Feltételezzük, hogy az első réteg szélén a $z = 0$ síkban fölvevett és az (1) összefüggéssel jellemzett térerősséget a lemezben keletkező örvényáramok nem befolyásolják.

b) A számítás egyszerűsítése céljából feltételezzük, hogy a z irányú (a lemezre merőleges) térerősség harmonikus összetevőinek csupán az amplitúdója változik meg z függvényében, hullámhossza és fázishelyzete azonban nem. Ez a közelítés $v_1 < 0,25 r$ esetében minden további nélkül megtehető, amint az a 3.2 pontból is kitűnik.

c) Vaslemezek permeabilitását állandónak (térerősségtől függetlennek) tekintjük.

d) Vaslemezek hiszterézis veszteségét elhanyagoljuk. Ez az elhanyagolás vastag lemezeken esetén jogos [6]. (Megjegyezzük, hogy a legjobb minőségű, hidegen hengerelt transzformátorlemez veszteségének kb. felét teszi ki a hiszterézis

veszteség. A vastagság növekedésével azonban ez a hányad rohamosan csökken.)

Számításunkban a kvázistacionárius terekre érvényes Maxwell egyenletekből indulunk ki:

$$\nabla \mathbf{H} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E}. \quad (4)$$

Itt \mathbf{H} [A/m] a mágneses térerősségnek, \mathbf{E} [V/m] pedig a villamos térerősségnek a vektora, μ [H/m] a mágneses permeabilitás, γ [S/m] a villamos vezetőképesség. Esetünkben \mathbf{H} -nak csak x és z irányú összetevője van ($H_y = 0$), és y irányban \mathbf{H} nem változik ($\partial \mathbf{H} / \partial y = 0$). Ebből következik, hogy az áramsűrűségnek viszont — végtelen hosszú lemezben — csak y irányú összetevője létezik ($i_x = i_z = 0$). A számításban föltételezzük, hogy mindhárom rétegnek véges villamos vezetőképessége van.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a (2) és (3) differenciálegyenleteket — közelítő feltételeink figyelembevételével — mindhárom rétegre kielégíti a

$$H_{zl} = H_m \sum_{k=1}^n f_k(x) \cdot g_{lk}(z) \cdot e^{j\omega t} \quad (5)$$

és

$$H_{xl} = H_m \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k\alpha)^2} f'_k(x) \cdot g'_{lk}(z) \cdot e^{j\omega t} \quad (6)$$

megoldás, ahol

$$f_k(x) = b_k \sin k\alpha x, \quad (7)$$

$$g_{lk}(z) = C_{lk1} e^{p_{lk} z} + C_{lk2} e^{-p_{lk} z}, \quad (8)$$

$$p_{lk}^2 = (k\alpha)^2 + j\omega\mu_l \gamma_l, \quad (9)$$

és az l index a szóban forgó réteg számára utal ($l = 1, 2, 3$). Az áramsűrűséget a (4) differenciálegyenletből kapjuk (5) és (6) fölhasználásával:

$$i_{yl} = j\omega\mu_l \gamma_l H_m \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k\alpha)^2} f'_k(x) \cdot g_{lk}(z) \cdot e^{j\omega t}. \quad (10)$$

Az (x, z) koordinátákkal jellemzett, az y irányban egységnyi hosszúságú elemi hasáb vesztesége a

$$dP_l(x, z) = \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_l} |i_{yl}(x, z)|^2 dx \cdot dz \quad (11)$$

összefüggésből számítható. (Az $1/2$ szorzó azért szerepel a képletben, mivel i_{y_l} (x, z) az áram csúcscértéke.) Az x irányban r méretű, y irányban pedig egységnyi hosszú lemezdarabok veszteségét ebből integrálással kapjuk:

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_1} \int_0^{v_1} \int_0^r |i_{y1}(x, z)|^2 dx dz, \quad (12)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_2} \int_{v_1}^{v_1+v_2} \int_0^r |i_{y2}(x, z)|^2 dx dz, \quad (13)$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_3} \int_{v_1+v_2}^{\infty} \int_0^r |i_{y3}(x, z)|^2 dx dz. \quad (14)$$

Az v irányban véges s hosszúságú lemez vesztesége közelítően egy

$$k_s = s \frac{1}{(r/s)^2 + 1} \quad (15)$$

tényezővel való szorzással adódik [5], tehát

$$P_{sl} = P_l k_s. \quad (16)$$

A C_{lk1} és C_{lk2} állandókat a határfeltételekből határozzuk meg.

a) Ha $z = 0$, akkor $H_{z1} = H_{z0}$, azaz (1), (5), (7) és (8) alapján

$$C_{1k1} + C_{1k2} = 1. \quad (17)$$

b) Ha $z \rightarrow \infty$, akkor $H_{z3} \rightarrow 0$, tehát (5)-ből, (7)-ből és (8)-ból

$$C_{3k1} = 0. \quad (18)$$

c) A réteghatárokon a z irányú indukció és az x irányú télerősség nem változik. Így az 1. és 2. réteg határán, azaz a $z = v_1$ helyen

$$\mu_1 H_{z1} = \mu_2 H_{z2},$$

és

$$H_{x1} = H_{x2},$$

vagyis (5)-ből, (6)-ból és (8)-ból

$$\mu_1 (C_{1k1} e^{p_{1k} v_1} + C_{1k2} e^{-p_{1k} v_1}) = \mu_2 (C_{2k1} e^{p_{2k} v_1} + C_{2k2} e^{-p_{2k} v_1}), \quad (19)$$

és

$$p_1 (C_{1k1} e^{p_{1k} v_1} - C_{1k2} e^{-p_{1k} v_1}) = p_2 (C_{2k1} e^{p_{2k} v_1} - C_{2k2} e^{-p_{2k} v_1}). \quad (20)$$

A 2. és 3. réteg határán, azaz a $z = v_1 + v_2$ helyen pedig

$$\mu_2 H_{z2} = \mu_3 H_{z3}$$

és

$$H_{x2} = H_{x3},$$

vagyis

$$\mu_2 (C_{2k1} e^{p_{2k}(v_1+v_2)} + C_{2k2} e^{-p_{2k}(v_1+v_2)}) = \mu_3 C_{3k2} e^{-p_{3k}(v_1+v_2)}, \quad (21)$$

és

$$p_2 (C_{2k1} e^{p_{2k}(v_1+v_2)} - C_{2k2} e^{-p_{2k}(v_1+v_2)}) = -p_3 C_{3k2} e^{-p_{3k}(v_1+v_2)}. \quad (22)$$

A (17) és (19)–(22) egyenletből álló ötismeretlenes egyenletrendszer megoldva a C_{1k1} , C_{1k2} , C_{2k1} , C_{2k2} és C_{3k2} állandó meghatározható.

Az eddigi összefüggések általános három réteges elrendezésre vonatkoznak, bármelyik rétegnek lehet véges villamos vezetőképessége. Ha csak a második réteg fém, és alatta meg fölötte levegőt, vagy más, villamosan nem vezető közeget feltételezünk, akkor természetesen csak a középső rétegben keletkezik veszteség, és ezt a

$$P_{s2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_2} s \frac{1}{(r/s)^2 + 1} \int_{v_1}^{v_1+v_2} \int_0^r |i_{y2}(x, z)|^2 dx dz \quad (23)$$

összefüggés alapján számíthatjuk.

Ha a térerősség a lemez felületén térben egyszerű szinuszos összefüggés szerint változik ($v_1 = 0$), vagyis ha

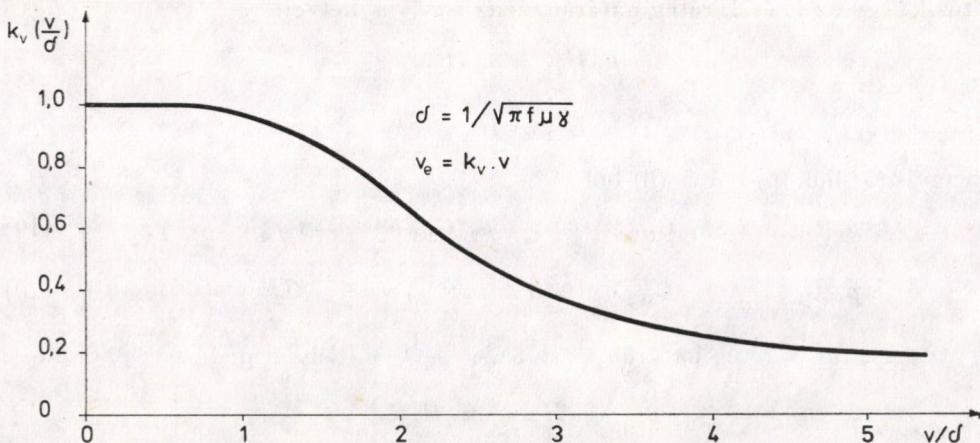
$$H_{z0} = H_m \sin \alpha x \cdot e^{j\omega t}, \quad (24)$$

akkor

$$P_{s2} = \gamma_2 f^2 (\mu_2 H_m)^2 r^3 s \frac{1}{(r/s)^2 + 1} k_v \cdot v_2, \quad (25)$$

ahol a k_v tényező értékét a lemezvastagság (v_2) és a lemezre jellemző behatolási mélység ($\delta = 1/\sqrt{\pi f \gamma_2 \mu_2}$) hányadosának függvényében a 3. ábra tünteti föl. A $k_v v_2$ szorzat a lemez egyenértékű vastagságának tekinthető.

Bármilyen is a térbeli térerősségmegoszlás, a (23) képlet mindig a (25) szerinti alakra hozható, csupán a (25)-ben szereplő H_m térerősséget kell meg-



3. ábra. A lemez egyenértékű vastagságának meghatározására szolgáló k -tényező

szorozni egy, a térerősségmegoszlástól függő k_H tényezővel. Ily módon a veszteségekre minden esetben fölírható a

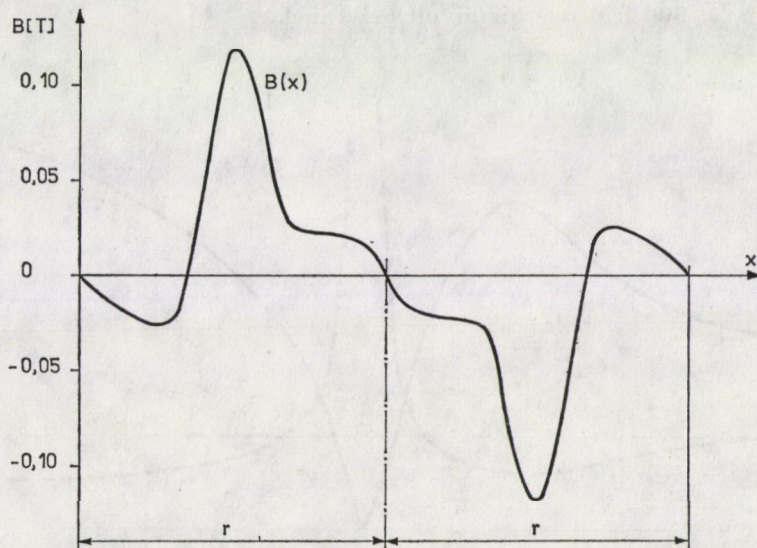
$$P_{s2} = \gamma_2 f^2 (\mu_2 k_H H_m)^2 r^3 s \frac{1}{(r/s)^2 + 1} k_e v_2$$

összefüggés, amelyből a jelenséget befolyásoló tényezők szerepe azonnal megállapítható.

2. A mért és számított veszteség összehasonlítása

Korábbi kísérletek alkalmával [8, 9] egy $2r = 0,8$ m, $s = 0,46$ m és $v_2 = 0,01$ m méretű vaslemez a felületére merőleges irányú, $f = 50$ Hz-cel változó térbe helyeztünk. A lemez hosszabbik oldala (az x tengely) mentén az indukció — a felületre helyezett mértőtekercsekkel mérve — a 4. ábra szerint oszlott meg. A rövidebb oldal mentén (az y tengely irányában) az indukció gyakorlatilag állandó volt. A lemezben mérés szerint 2825 W örvényáramvesztés keletkezett.

A lemez veszteségét az 1. pont szerinti számítási módszerrel is meghatároztuk. A lemez felületén a térerősségmegoszlást azonosnak feltételeztük a 4. ábra indukciógörbéjének megfelelő térerősségmegoszlással ($v_1 = 0$). A számításban a lemez relatív mágneses permeabilitását $\mu_r = 50$ -re, villamos vezetőképessé-



4. ábra. A felületre merőleges indukció megoszlása a kísérleti lemez felületén [8]

ségét pedig $\gamma = 7 \cdot 10^6$ S/m-re vettük. $r = 0,4$ m hosszú, tehát a mért lemez felét kitevő lemezdarabban a (23) összefüggés szerint számolva 1440 W örvényáram-vesztés adódott, így a teljes lemezre 2880 W-ot kaptunk, ami meglepően jó eredmény.

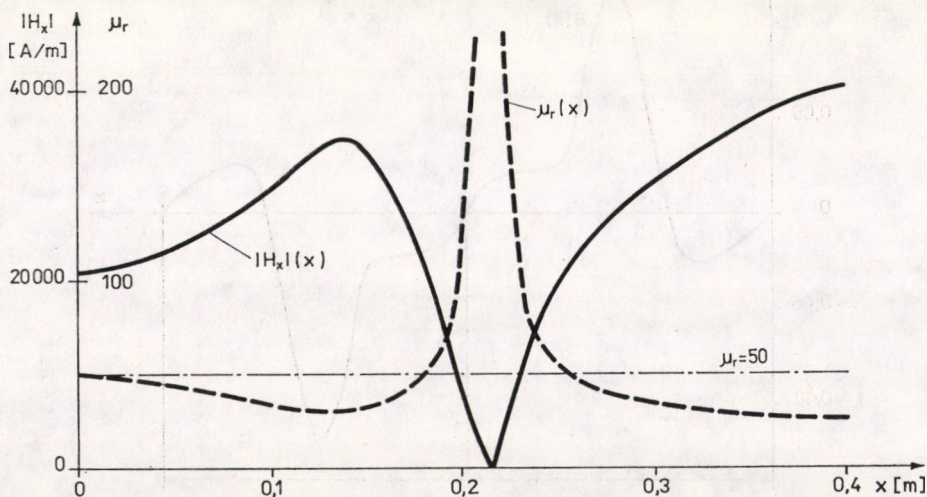
μ_r értékét tapasztalat alapján vettük föl 50-re. Becslésünk helyességét az 5. ábrán ellenőriztük. Ezen az ábrán a lemezzel párhuzamos irányú, a (6) összefüggésből számítható H_x felületi térerősség abszolút értékét tüntettük föl x függvényében. (Ilyen feladatokban H_x általában egy-két nagyságrenddel nagyobb H_z -nél, ezért μ_r szempontjából H_x értéke döntő.) A kísérletekben használt vaslemez relatív permeabilitása (μ_r) és a térerősség (H) között az egyenárammal fölvelt mágnesezési görbe alapján a

$$\mu_r = 2 |H|, \quad (H < 450 \text{ A/m})$$

és

$$\mu_r = 955 \left(1,0014 - e^{\frac{1075}{|H|}} \right) \quad (H \geq 450 \text{ A/m})$$

kapcsolat áll fenn. Ebből minden egyes H_x értékhez meghatározható egy μ_r relatív permeabilitás, és így a $\mu_r(x)$ görbe is fölrajzolható. Az 5. ábrából látható, hogy a számításban használt $\mu_r = 50$ érték az egész lemezre vonatkozó közepes értéknek tekinthető, becslésünk tehát helyes volt. Számításokban mindig μ_r -nek a tapasztalat alapján becsült értékéből kell kiindulni, és ezt az értéket az adott esetre fölrajzolt $\mu_r(x)$ görbével kell ellenőrizni. H_x csökkenésével μ_r jelentősen növekedhetik, pl. egy másik számításban, amikor H_x maximumára 6000 A/m adódott, $\mu_r = 500$ felvétele bizonyult helyesnek.

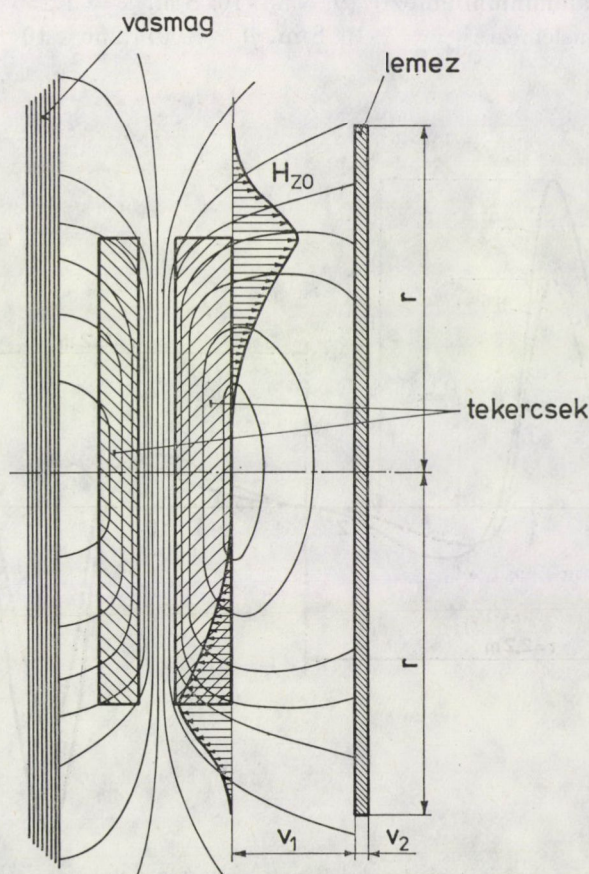


5. ábra. A lemezzel párhuzamos irányú felületi térerősség abszolút értéke és a hozzá tartozó relatív permeabilitás a lemez felületén

μ_r fölvétele a számított veszteséget jelentősen befolyásolja. Esetünkben $\mu_r = 100$ -zal számolva a $2r$ hosszúságú lemez veszteségeire 1940 W-ot, $\mu_r = 500$ -zal pedig 624 W-ot kaptunk. Lényegesen kisebb szerepet játszik a permeabilitás értéke akkor, ha a térerősséget a lemeztől messze rögzítjük, vagyis ha v_1 nagy. $v_1 = 0,5$ m esetén pl. a $\mu_r = 50$ -nel számított veszteség csak kb. 30%-kal különbözik a $\mu_r = 500$ -zal számítottól. Megjegyezzük még, hogy pontos számításban μ_r -nek a helytől való függését is figyelembe kellene venni, közelítő számításunkban azonban állandó permeabilitással számolunk.

3. Koncentrikus tekercsek szórt terében levő lemezek

A 6. ábra két koncentrikus, vasmagos tekercs szórt terének vázlatos rajzát tünteti föl. A tekercsek mellett, tengelyükkel párhuzamosan fémlemez helyezkedik el, ebben a szórt fluxus örvényáramokat kelt. Az örvényáramveszte-



6. ábra. Vasmagos, koncentrikus tekercsek mágneses terében levő lemez

tük el. A lemezek 4,4 m hosszúak voltak ($2r = 4,4$ m). A tekercsek külső széle és a lemez közötti távolságot (v_1) 0,1 m-es lépcsőkben 0,1 m-től 0,5 m-ig változtattuk. A numerikus számításokat egy korábban kidolgozott, síkproblémára visszavezethető elrendezések számítására alkalmas kvázistacioner mágnesτέρ számító programmal végeztük [10].

A program a következő megkötéseket teszi:

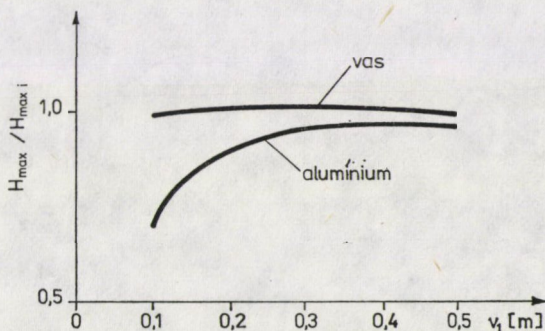
a) Mind a mágneses permeabilitás, mind pedig a fajlagos vezetőképesség izotrop (iránytól független) anyagjellemző. Nem függnek az anyagjellemzők a térjellemzőktől (a mágneses indukciótól és a villamos térerősségtől) sem.

b) A térjellemzők időben szinuszosan váltakoznak.

c) Mivel a program síkproblémákat számol, ezért áram a Descartes-koordinátákkal jellemzett térnek csak egyik irányában folyik. Mind az áramok, mind a geometriai elrendezés, mind pedig az anyagjellemzők ettől a koordinátától függetlenek.

3.1. Az örvényáramok visszahatása a tekercs széle menti sugárirányú indukciómegoszlásra

Örvényárammentes esetben, vagyis lemez nélkül, a térerősség sugárirányú összetevője a tekercs széle mentén a 7. ábra a) görbéje szerint változik. Ezt az indukciómegoszlást a tekercs mellé helyezett vaslemez a vizsgált tartományban — 0,1 m és 0,5 m közötti lemeztávolság esetében — gyakorlatilag nem befolyásolja. A görbe alakját alumíniumlemez jelenléte is csak kevésbé torzítja, amplitúdóját azonban jelentősen csökkentheti (lásd a 7. ábra b) görbét). (Itt és a továbbiakban alumíniumlemezen a 10 mm vastag lemezt értjük. A 16 mm-es lemezre vonatkozó számítások eredményei minőségi szempontból alig különböztek a 10 mm-es lemez eredményeitől). Az amplitúdócsökkenés nagysága a 8. ábrából olvasható le, amelyen a tekercs szélén megjelenő térerősség maximumának (H_{\max} -nak) az ideális (örvényárammentes, ill. lemez nélküli) esetben fellépő maximális térerősséghez ($H_{\max i}$ -hez) való viszonyát tüntettük föl a



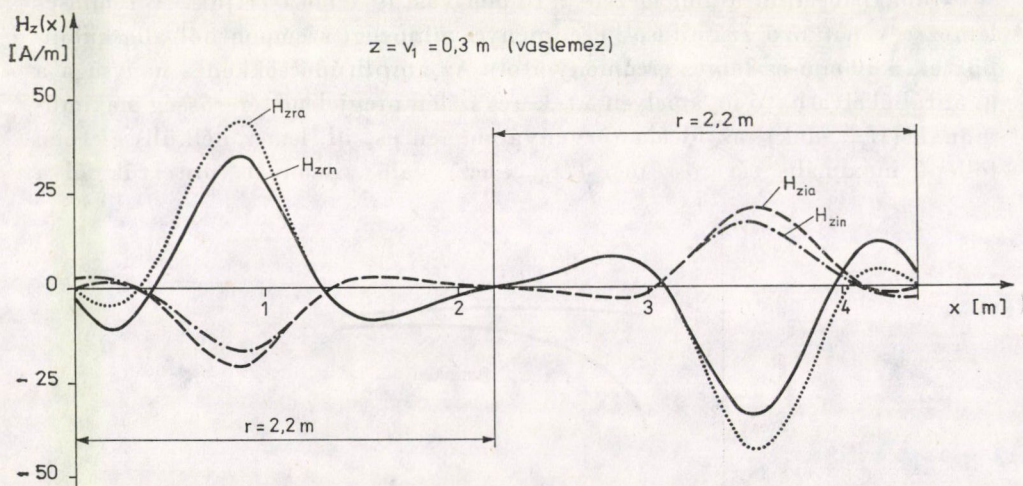
8. ábra. A tekercs szélén örvényáramos esetben fellépő maximális sugárirányú térerősség (H_{\max}) viszonya az örvényárammentes esetben kialakuló maximumhoz ($H_{\max i}$ -hez képest)

lemez távolságának függvényében. Az ábra görbéi arra is választ adnak, milyen mértékben teljesül a kiindulási térerősség (H_{z0}) állandóságára vonatkozóan az analitikus módszer levezetése során az 1. pontban tett *a*) feltétel.

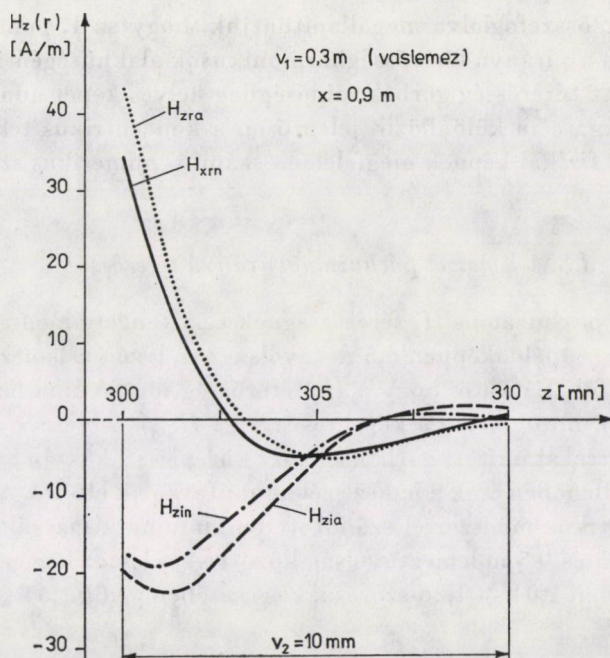
Az alumínium és a vaslemez különböző viselkedése a mágneses permeabilitásuk közötti jelentős különbséggel magyarázható. Az örvényáramok ugyanis mindkét esetben az őket létrehozó fluxus ellen hatnak, tehát csökkentik a tekercs szélén uralkodó sugárirányú térerősséget. Vaslemez esetében azonban a mágneses ellenállású anyag a fluxust magába szívja.

3.2 A lemezre merőleges irányú térerősség

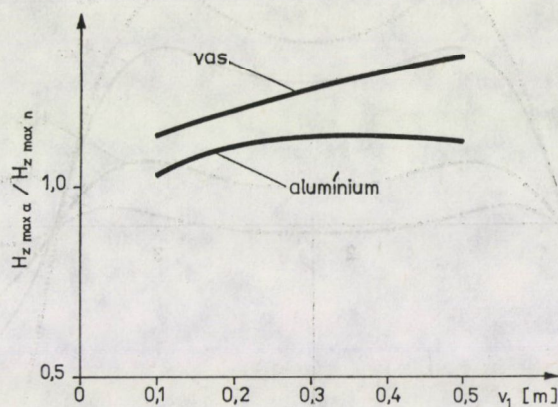
Ha a tekercs széle mentén mindkét számításban azonos sugárirányú térerősségmegoszlást feltételezünk, akkor a lemez felületén az analitikus módszer nagyobb térerősséget ad, mint a numerikus számítás, a térerősségmegoszlási görbe alakja azonban a két esetben alig különbözik egymástól. Ezt szemlélteti a 9. ábra, amely példaképpen a tekercstől 0,3 m-re elhelyezett vaslemez felületén fellépő térerősség valós (a H_{z0} kiindulási térerősséggel fázisban levő H_{zra} és H_{zrn}) és képzetes (a H_{z0} térerősséghez képest időben 90° -os fáziseltolódású H_{zia} és H_{zin}) összetevőit tünteti föl. Az analitikus módszerrel számított mennyiségeket itt és a továbbiakban is *a* index-szel, a numerikus módszerrel számítottakat pedig *n* index-szel jelöltük. A lemez közepén a két eljárás teljesen azonos eredményt ad, a görbék a lemez szélén különböznek nagyobb mértékben. A 10. ábra a 9. ábra szerinti maximális térerősség helyén (az $x = 0,9$ m helyen) mutatja a



9. ábra. A lemezre merőleges térerősség valós (*r* index) és képzetes (*i* index) összetevőjének változása $v_1 = 0,3$ m-re elhelyezett vaslemez felületén analitikus eljárással (*a* index) és numerikus módszerrel (*n* index) számítva



10. ábra. A lemeze merőleges térerősség összetevőinek változása a lemezvastagsága mentén. (Az indexek jelentése ugyanaz, mint a 9. ábrában)



11. ábra. A lemez felületén fellépő maximális sugárirányú térerősség analitikus módszerrel és numerikus eljárással számított értékének a hányadosa

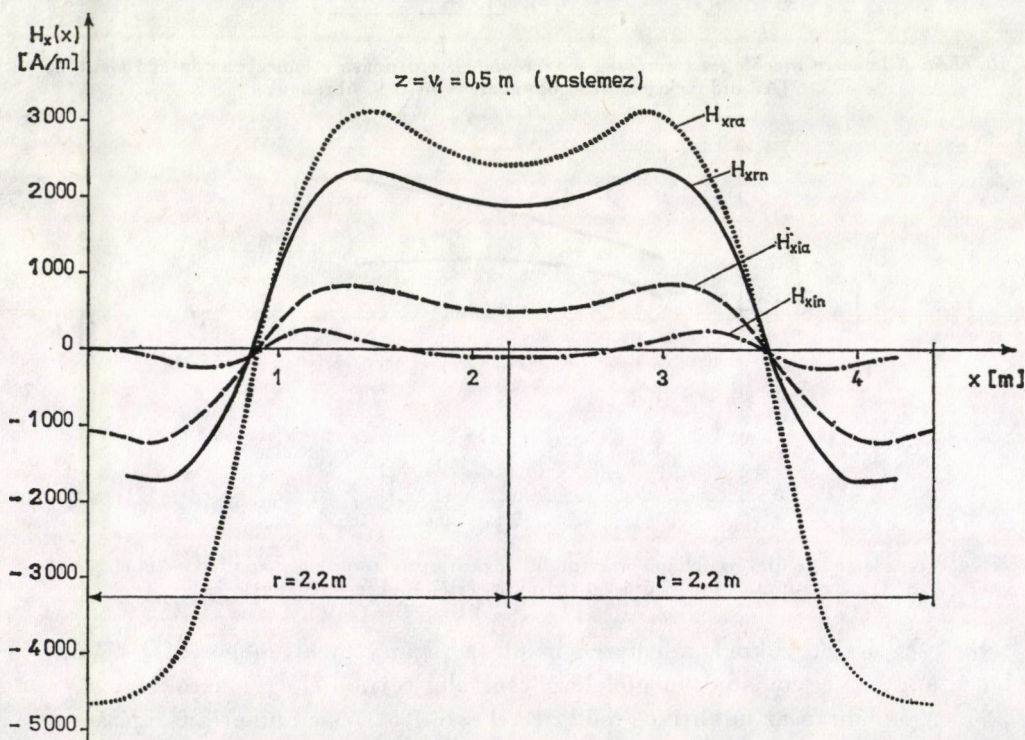
térerősség összetevőknek a lemezen belüli (a z irány menti megoszlását). Látható, hogy az egymásnak megfelelő görbék alig térnek el egymástól.

A 11. ábrán az analitikus módszerrel számított és a numerikus eljárással meghatározott maximális térerősség valós összetevőjének hányadosát rajzoltuk föl a tekercs és a lemez közötti távolság függvényében.

A fentieket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az 1. pont *b)* feltétele alapján — vagyis a z irányú térerősségharmonikusok alakhűségének feltételezésével — számított térerősség görbék minőségileg helyes képet adnak, de a térerősségek nagysága sem különbözik jelentősen a koncentrikus tekercsek szórt terét a valóságos fizikai képnek megfelelően számító numerikus számítás eredményeitől.

3.3 A lemezzel párhuzamos irányú térerősség

A lemezzel párhuzamos H_x térerősségnek az x tengely menti megoszlását a lemez felületén — példaképpen 0,5 m távolságban levő vaslemez esetére — a 12. ábra tünteti föl. Látható, hogy a H_z térerősség maximuma helyén mind a valós (H_{xra} , H_{xrn}), mind pedig a képzetes (H_{xia} , H_{xin}) összetevő előjelet vált. A kétféle módszerrel számított görbék a lemez középső szakaszán hasonló menetűek, a görbék jellegében csak a lemez szélein mutatkozik eltérés. A valós összetevőnek az analitikus módszerrel számított maximuma a vizsgált tartományban — azaz 0,1 m és 0,5 m lemeztávolság között — a lemez középső szakaszán alumínium esetében $1,04 \div 1,26$ -szorosa, vas esetében pedig $1,34 \div 1,48$ -szoro-



12. ábra. A lemezzel párhuzamos térerősség összetevőinek változása $v_1 = 0,5$ m-re elhelyezett vaslemez felületén. (Az indexek jelentése ugyanaz, mint a 9. ábrában)

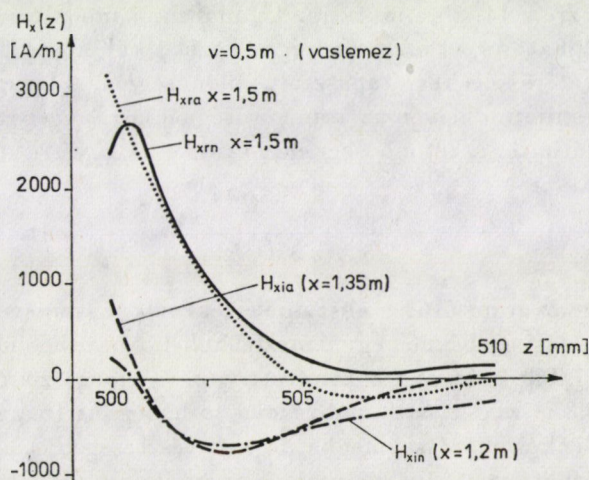
sa a numerikus módszerrel ugyanerre a szakaszra számított maximumnak. A lemez szélső szakaszán mutatkozó maximumok hányadosára alumínium esetében $1,31 \div 1,64$, vas esetében pedig $2,06 \div 3,46$ adódott. A két különböző eljárással számított képzetes összetevők között ennél is nagyobb a különbség, ez az összetevő azonban — amint azt a 12. ábra is mutatja, általában jóval kisebb a valós összetevőnél.

A H_x összetevőnek a lemez vastagsági mérete (a z tengely) mentén való megoszlását, a $H_x(z)$ függvényt a lemez középső szakaszán mutatkozó maximumok helyén — a 12. ábra szerinti esetre — a 13. ábra tünteti föl. Látható, hogy a két különböző módszerrel számított térerősség összetevők között a lemez belsejében jóval kisebb a különbség, mint a lemez felületén.

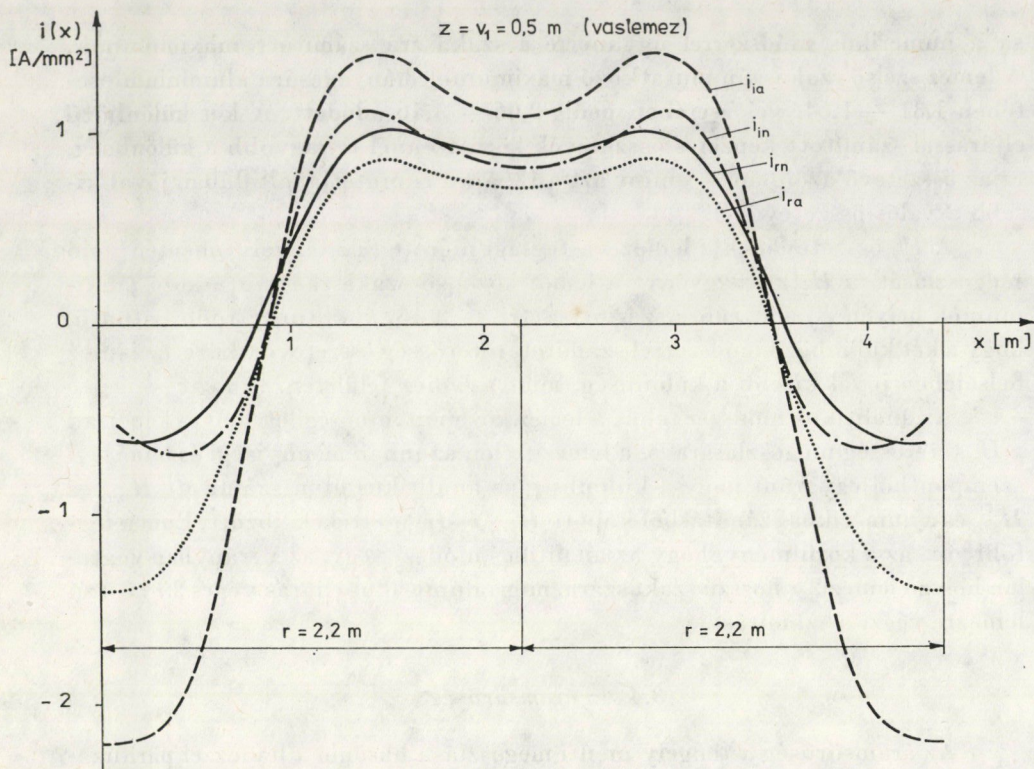
Az analitikus módszer tehát a lemez közepén minőségileg helyes képet ad a H_x térerősség megoszlására is, a lemez szélén azonban mennyiségi és minőségi szempontból egyaránt nagy a különbség az analitikus úton számított H_{xra} és H_{xia} és a numerikus számításból kapott H_{xrn} és H_{xin} értékek között. Ennek legfőbb oka az a körülmény, hogy az analitikus módszer egy, az x irányban végtelen hosszú lemez $2r$ hosszú szakaszára, míg a numerikus eljárás véges $2r$ hosszú lemezre végzi a számítást.

3.4 Az áramsűrűség

Az áramsűrűség x tengely menti megoszlása hasonló a lemezzel párhuzamos H_x térerősség megoszlásához, azaz az $i(x)$ görbék menete olyan jellegű, mint a $H_x(x)$ görbéké. Az áramsűrűség valós és képzetes összetevőjének a két-féle módszerrel számított értékét az előbb vizsgált esetre, azaz 0,5 m távolság-



13. ábra. A lemezzel párhuzamos térerősség összetevőinek változása a lemez vastagsága mentén. (Az indexek jelölése ugyanaz, mint a 9. ábrában)

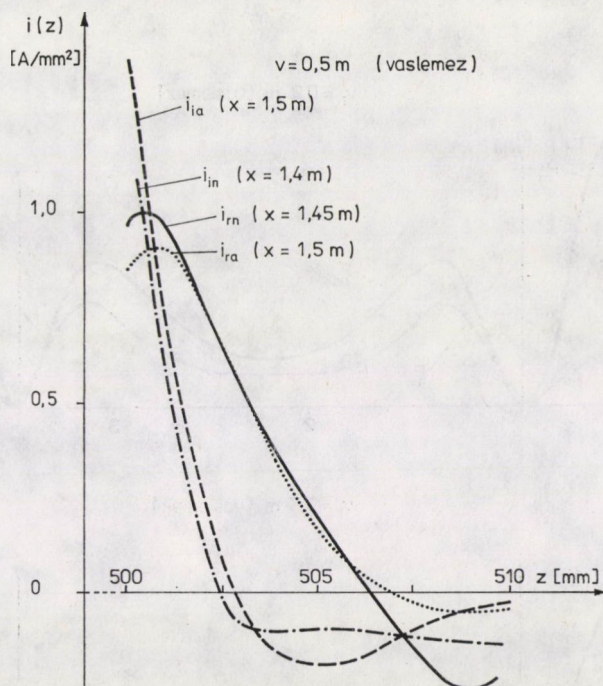


14. ábra. Az örvényáramsűrűség összetevőinek változása $v_1 = 0,5$ m-re elhelyezett vaslemez felületén. (Az indexek jelölése ugyanaz, mint a 9. ábrában)

ban levő vaslemezre a 14. ábra mutatja. Az analitikus módszerrel és a numerikus eljárással meghatározott áramsűrűségek közötti különbség kisebb a lemezzel párhuzamos térerősségekben tapasztalt különbségnél. A lemez középső szakaszán föllépő maximum helyén az áramsűrűségnek a z tengely menti megoszlása a 15. ábrán látható. A két módszer egymástól csak kevéssé különböző megoszlási görbét ad.

3.5 A veszteség

A veszteség az áramsűrűség abszolút értékének négyzetével arányos, így a veszteségmegoszlási görbéknek egy lemezfelén belül zérushelyük és két maximumuk van. A kétféle módszerrel számított veszteségmegoszlási görbéket példaképpen $v_1 = 0,3$ m-re és $v_1 = 0,5$ m-re levő vaslemezre a 16.a, ill. a 16.b ábra mutatja. Az analitikus eljárással meghatározott veszteség (P_a), amint az az eddigiek alapján várható volt, jóval nagyobb a numerikus módszerrel kapott veszteségnél (P_n -nél). Az ábra alapján a veszteségek keletkezési helyük szerint két részre oszthatók: a lemez belső részében (a lemeznek a tekercsel szemben levő



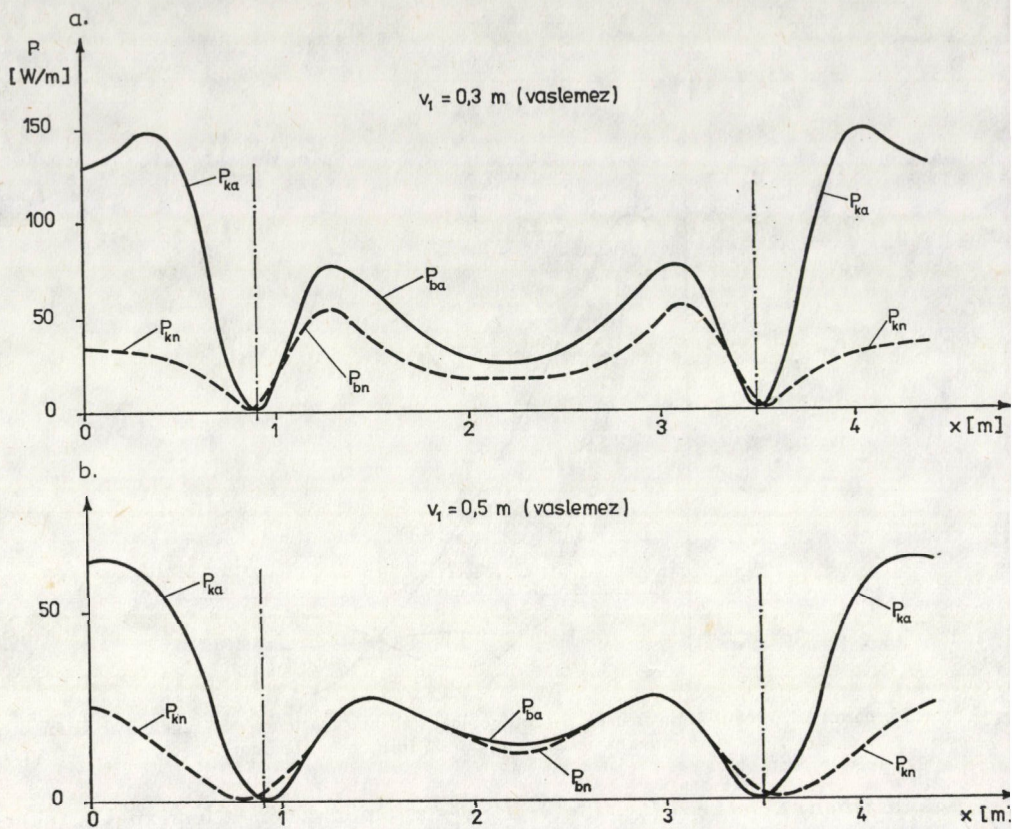
15. ábra. Az örvényáramsűrűség összetevőinek változása a lemez vastagsága mentén.
(Az indexek jelölése ugyanaz, mint a 9. ábrában)

szakaszában) keletkező P_{ba} , illetve P_{bn} , és a lemez szélén (a lemeznek a tekercsen túlnyúló szakaszában) létrejövő P_{ka} , illetve P_{kn} veszteségre. A kétféle módszerrel számított veszteségek és veszteségrészek hányadosát vaslemezre a 17. ábra adja meg a lemeztávolság függvényében. (Alumíniumlemezre jóval kisebb hányados adódott). Látható, hogy a vizsgált tartományban egyrészt a belső rész veszteségére vonatkozó P_{ba}/P_{bn} hányados jóval kisebb a szélek veszteségéből számított P_{ka}/P_{kn} hányadosnál, másrészt pedig az előző a távolság függvényében jelentősen csökken, míg az utóbbi nem sokat változik. Ez a megfigyelés lehetővé teszi, hogy a szélhatás okozta jelentős hibát két — egyrészt a belső részre vonatkozó k_b , másrészt a szélekre vonatkozó k_k — korrekciós tényezővel számolva kiküszöböljük, és ezzel analitikus módszerünket a tárgyalt esettől eltérő méretű és télerősségmegoszlású lemezre is alkalmazhassuk. A valóságos veszteség ebben az esetben a

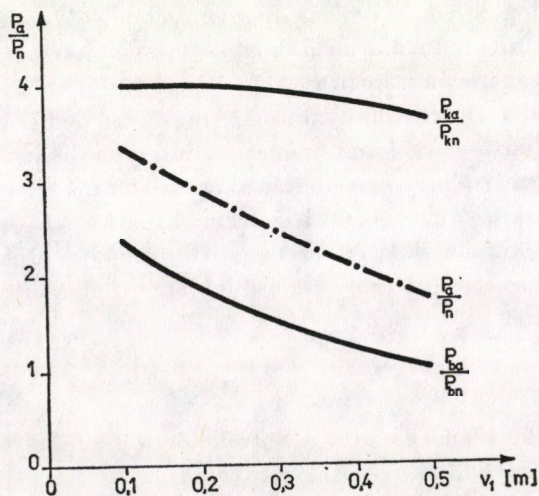
$$P_v = k_b P_{ba} + k_k P_{ka}$$

összefüggés alapján számíthatjuk. A korrekciós tényezőket a 17. ábrán feltüntetett veszteséghányadosok reciprok értéke adja.

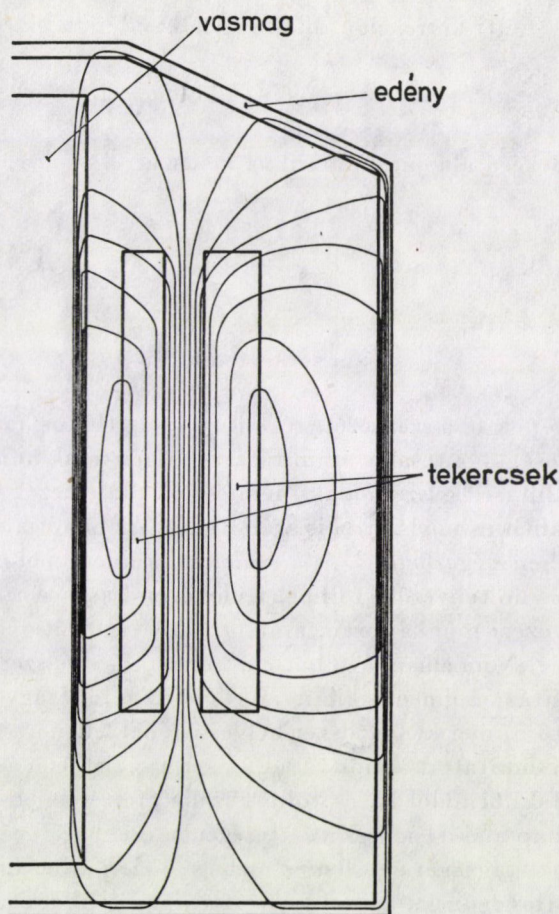
Az analitikus eljárás egyik gyakorlati alkalmazása *transzformátorok edényveszteségének meghatározása* (18. ábra). Ebben az esetben az edényfalnak a tekerc-



16. ábra. Veszteségmegoszlás a lemezben vaslemez esetében



17. ábra. Az analitikus és numerikus módszerrel számított veszteségek és veszteségrészek hányadosa vaslemez esetében



18. ábra. Transzformátorok edényvesztésének számításához alapul vett modell

csekkel párhuzamos szakaszában keletkező veszteséget számítjuk, és ezt a fentieknek megfelelően két részre — a tekercssel szemközti és a tekercsen túlnyúló edényfalrészben keletkező veszteségre — osztjuk. A korrekciós tényezőket a 220 kV-os és 400 kV-os nagytranszformátorok szokásos elrendezésére végzett numerikus számítás alapján határoztuk meg. Eszerint a belső rész veszteségét egy, a tekercs és edényfal közötti távolságtól függő, 250 és 350 mm között $k_b = 0,6 \div 0,7$ -nek vehető tényezővel, a külső részek veszteségét pedig $k_k = 0,65$ tényezővel kell szorozni. (A külső részek veszteségét kisebb mértékben kell korrigálni, mint a lemezek esetében, mivel itt az edény fedelét és fenekét képező lemezszakaszok miatt a szélhatás is kisebb.)

Példa. Egy 400 kV-os 270 MVA-es háromfázisú transzformátor edényfalában analitikus módszerünkkel $P_b = 18\,250\text{ W}$ és $P_k = 24\,400\text{ W}$ vesztesé-

get számoltunk. A fenti korrekciót alkalmazva az edényveszteség

$$P_{ea} = 0,7 \cdot 18\,250 + 0,65 \cdot 24\,400 = 28\,635 \text{ W}.$$

A 18. ábra elrendezése alapján numerikus módszerrel

$$P_{en} = 29\,250 \text{ W}$$

veszteséget kaptunk.

4. Következtetés

A villamosgépek fém szerkezeti részeiben szórt fluxus hatására keletkező örvényáramveszteség pontosabb számítására elvben csak numerikus számítógépes eljárás alkalmas. Egyszerű alakú fémrészek, pl. lemezek vesztesége azonban *közelítően* analitikus módszerrel is számítható. Az analitikus számítás gyorsabban, könnyebben végezhető el, és a számítási képletekből megállapítható a jelenséget befolyásoló tényezők szerepe. Különösen hasznos az analitikus módszer pl. a géptervezési munka során, amikor több változat gyors összehasonlítására van szükség. Nem elhanyagolható az analitikus módszernek az az előnye sem, hogy a számítás eredménye könnyen ellenőrizhető, és így a bonyolult, nehezen áttekinthető numerikus módszer helyességének ellenőrzésre is szolgálhat.

A cikkben bemutatott számítási eljárás a kvázistacionárius tereket leíró Maxwell-egyenletekből indul ki, és több közelítő feltételt bevezetve egyszerű formulát ad téglalap alakú lemezek veszteségének meghatározására. A számítás a lemezek véges vastagságát és a lemez mellett, vele párhuzamos nem örvényáramos rétegnek (levegőnek, olajnak) a veszteségre gyakorolt hatását is figyelembe veszi. Az örvényáramveszteség a lemeznek a cikkben definiált *egyenértékű vastagságával* arányos.

A módszerrel koncentrikus tekercsek szórt mágneses terében levő lemezek, így transzformátoredények vesztesége is számítható. Az analitikus számítást egy példa kapcsán numerikus eljárással hasonlítottuk össze, és ennek során megvizsgáltuk a lemez felületén és belsejében kialakuló térerősség, áramsűrűség és veszteségmegoszlást.

Köszönetnyilvánítás

A szerző ezen a helyen is köszönetet mond SZABÓ LÁSZLÓNAK, a Ganz Villamossági Művek kutató mérnökének a cikkben szereplő numerikus számítások elvégzéséért.

IRODALOM

1. CARPENTER, C. J. — DJUROVIČ, M.: Three-dimensional Numerical Solution of Eddy Currents in Thin Plates. *Proc. IEE*, **122** (1975), 681—688
2. WEILAND, TH.: Ein Verfahren zur Berechnung von Wirbelströmen in massiven, dreidimensionalen, beliebig geformten Eisenkörpern. *ETZ Archiv*, (1979), H. 9. 263—267
3. CARPENTER, C. J. — SHARPLESS, K. O. — DJUROVIČ, M.: Heating in Transformer Cores Due to Radial Leakage Flux. Pt 2: Computed results. *Proc. IEE*, **124** (1977), 1181—1186
4. STOLL, R. L.: Approximate Formula for the Eddy-Current Loss Induced in a Long Conductor of Rectangular Cross-Section by a Transverse Magnetic Field. *Proc. IEE*, **116** (1969), 1003—1008
5. KERÉNYI, D.: Approximate Formula for the Eddy Current Losses Induced in Rectangular Metal Blocks by Magnetic Field. *Ganz Electric Review*, No 16. (1977), 13—22
6. AGARWAL, D.: Eddy-Current Losses in Solid and Laminated Iron. *Transactions AIEE* **78** (1959), Part II. 169—179
7. DE MEY, G.: A Method for Calculating Eddy Currents in Plates of Arbitrary Geometry. *Archiv für Elektrotechnik* **56** (1974), 137—140
8. KARSAI K. — KERTÉSZ V.: Transzformátorok szórt mágneses tere által okozott többletveszteségek vizsgálata. 3. rész. VÉIKI-VBF 317. számú tanulmány, 1975.
9. KARSAI K. — KERÉNYI D. — KERTÉSZ V.: A transzformátorok sugárirányú szórt mágneses térben keletkező veszteségek és melegedések. *Elektrotechnika*, **70** (1977), 237—246
10. MÁRKON S. — SZABÓ, L.: Quasi-Stationary Magnetic Field Computing Program and its Application in Special Calculation of Electrical Machines. *Ganz Electric Review*, No 16 (1977), 35—46

Analytic Method for the Approximate Calculation of the Eddy-Current Loss of a Metal Plate Placed into a Magnetic Field. — To the approximate calculation of the eddy-current loss of a metal plate put into a magnetic field an analytic method is presented which takes into account also the finite thickness of the plate and the effect exerted by the layer which is free of eddy current (air, oil) near the plate. Starting from Maxwell's equations but by using several approximate assumptions a simple formula is yielded to the determination of the eddy-current loss from which the role of the factors affecting the phenomenon may clearly be seen. The method may be used to calculate the loss of a plate, for example, a transformer tank, placed into a magnetic field of concentric coils.

Analytisches Näherungsverfahren zur Berechnung von Wirbelströmen in Metallplatten. — Es wird ein analytisches Näherungsverfahren zur Berechnung der Wirbelstromverluste in einer von einem magnetischen Wechselfeld durchsetzten Platte dargestellt. In der Berechnung wird sowohl die endliche Dicke der Platte als auch der Einfluß der neben der Platte liegenden wirbelstromfreien Schichten (Luft, Öl) auf die Verluste berücksichtigt. Ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen und nach Einführung mehrerer Näherungen ergibt sich eine einfache Formel zur Berechnung der Wirbelstromverluste. Diese Formel deckt auch die Rolle der einzelnen, die Wirbelstromerscheinungen beeinflussenden Parameter auf. Das Verfahren kann auch für die Berechnung der Wirbelstromverluste von im Magnetfeld konzentrischer Wicklungen liegenden Platten, z. B. Transformatorkesseln benutzt werden.

„TESZGA” VÉGESELEMES PROGRAMRENDSZER TENGYELYSZIMMETRIKUS GEOMETRIÁJÚ ÉS ALAKVÁLTOZÁSÚ SZERKEZETEK SZILÁRDSÁGTANI SZÁMÍTÁSÁRA

PÁCZELT ISTVÁN*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. július 9-én]

A tanulmány röviden ismerteti a programrendszer felépítését, a végeselemes modellezéshez felhasználható 11 féle vékonyfalú héjelemet, izoparametrikus gyűrűalakú elemet, gyűrűt (mint görbe tartót), rugóelemet tartalmazó elemkönyvtárat. Kitér az elmozdulásmezőben fennálló szakadás figyelembevételének számítástechnikai kezelésére, továbbá számpéldákat mutat be vékonyfalú héjelemekből felépített szerkezetek szilárdságtani számítására.

1. Bevezetés

A szerkezetek szilárdságtani számítására alkalmas effektív számítógépi program kifejlesztéséhez a tudományok három ágának

- a szerkezetek szilárdságtanának,
- a numerikus módszereknek,
- a számítógép alkalmazásának

ismerete szükséges. A számítógép sikeres alkalmazása a szerkezetek szilárdságtanának olyan tárgyalását követeli meg, amely a számítógép nyelvére könnyen lefordítható modellekkel dolgozik. Egy ilyen, a mérnöki szemlélethez is jól igazodó szilárdságtani modellt szolgáltat az ún. végeselemes módszer [1]. A TESZGA a potenciális energia minimuma elvre alapozott ún. kompatibilis elmozdulási elemmodellekkel dolgozó programrendszert jelöl [2], melynek létrehozásánál felhasználtuk a SAP IV programrendszer [3] strukturális felépítettségét. A programrendszer felépítéséhez az alábbi szempontokat vettük figyelembe:

A programrendszer a számítási fázis több pontjából legyen indítható; a bemenő adatokkal kapcsolatosan minél több, a számítás biztonságát növelő, számítógép által végrehajtott ellenőrzés álljon fenn; a programrendszer kívánság szerint csak adatellenőrzést hajtson végre, illetve az adatellenőrzést hibamentes esetben futás kövesse; az elemkönyvtár bővíthető legyen; egyszeri futtatással a szerkezet többfajta terhelés alatti viselkedése nyomkövethető

* Dr. Páczelt István, 3531 Miskolc, Győri kapu 37, III. 3.

legyen, a terhelések súlyozva szuperponálhatók legyenek; egyszerű geometriájú (meridiánú) elemek esetében az elemekre való osztás automatizált legyen; a héjszerkezet anyagállandóinak hőmérséklettől való függését a program képes legyen figyelembevenni; adott elmozdulások, elmozdulásmezőben fennálló szakadás, ferde görgős támasz figyelembevételére is nyíljék lehetőség.

2. A számítható szerkezet geometriája, geometriai perem- és illesztési feltételek

A vizsgálható szerkezeteket két nagy osztályba soroljuk. Az egyik osztályt zömében vékonyfalú szerkezeti elemek alkotják, és így ezt röviden héjszerkezetnek nevezzük, míg a másik osztály tetszőleges kialakítású forgástestekből áll.

A **h é j s z e r k e z e t** héjakból, rugókból, gyűrűalakú tartókból és rugalmas közegből áll. Ezek modellezésére a technikai héjelmélet hipotéziseivel dolgozó 11 fajta héjelemet, 3 féle rugóelemet, görbe tartót, illetve Winkler-típusú rugalmas közeget használhatunk.

A forgástestekből felépített rugalmas rendszert ún. izoparametrikus gyűrűalakú elemekkel modellezzük.

A vizsgált szerkezet olyan végeselemes modellezése is megengedett, amikor a feszültségállapot pontosítása céljából a vékonyfalúnak tekintett szerkezet héjainak csatlakozási (illesztési) helyeit, illetve azok környezetét izoparametrikus gyűrűelemekkel modellezzük, míg a többi részt héjelemekkel.

A héjak *egyszeresen* és *kétszeresen görbültek* lehetnek.

Egyszeresen görbültek a kúp és henger (ide soroljuk a hajlított lemezt és tárcsát is). Kétszeresen görbültek a

1. tóruszalakú (gömb) héjak,
2. kúpszeletek egyenletével megadott meridiánú héjak (kivéve gömb),
3. tetszőleges meridiánú héjak, amelyeket $N_i \geq 3$ számú ponton átmenő C^1 osztályú folytonosságú $r = r(Z)$, vagy $Z = Z(r)$ függvénykapcsolattal leírt meridiánú héjelemek összességével fedünk le.

A tetszőleges meridiánú héjak meridián görbójét tehát köbös polinom segítségével közelítjük. A közelítésükre használt héjelemeket általános $r(Z)$, vagy általános $Z(r)$ típusú héjelemeknek nevezzük. A tetszőleges héjak száma T ($t = 1, \dots, T$), Z — a forgástengelyirányú koordináta, r — a héj paralel sugara.

Az 1) és 2) sorszám alatt felsorolt héjakat típus számokkal látjuk el. Egy-egy típus szám egy meghatározott geometriájú forgásfelületet jelöl ki. A modellezésnél felvett héjelemek ezeken a felületeken helyezkednek el, de nem kötelesek lefedni azt teljesen.

A héjszerkezetben szereplő héjak falát

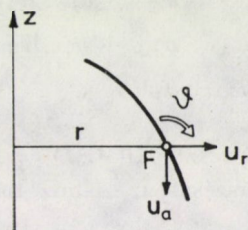
1. állandó vastagságú, egyrétegű;
2. állandó vastagságú, középfelületre szimmetrikusan elhelyezkedő háromrétegű;
3. lineárisan változó falvastagságú egyrétegű héjelemekkel tudjuk modellezni.

A héjszerkezet végeselemes modellezésével nyert végeselemeket kijelölő csomóköröknél, csomókörökként tetszőleges variációban le lehet kötni (zérus, vagy attól eltérő értékkel) a radiális- és az axiális elmozdulást, valamint a szögelfordulást, illetve tetszőleges ferdehatásvonalú görgős támaszt is fel lehet venni.

A kötöttségeket a számítógép az $ID(I, J)$ ($I = 1, 2, \dots, \text{NUMNP}$) ($J = 1, 2, 3$) tömbben tárolja, ahol NUMNP — a feladathoz tartozó csomókörök száma. Amennyiben az N -edik csomókör J -edik általánosított elmozduláskoordinátája tetszőleges, úgy $ID(N, J) = 0$, amennyiben az elmozduláskoordináta előírt (kötött) (zérus értékű is lehet), úgy $ID(N, J) = 1$.

A programrendszer a szerkezeti elemek közötti kapcsolatot kétoldalúnak tekinti (az elemek alakváltozás előtt párbaállított pontjai — csatolandó pontjai — az alakváltozás után a tér azonos pontjában helyezkednek el).

Az elemek csatolásánál kitüntetett szerepe van az ún. *főcsomókör*nek, vagyis annak a csomókörnek, amelyben szereplő elmozdulások és szögelfordulások a végső algebrai egyenletrendszerben ismeretlenként fognak szerepelni. Jelölje $\mathbf{q}_F = [u_r, u_a, \vartheta]_F$ — az F csomókör általánosított elmozdulásvektorát (1. ábra).

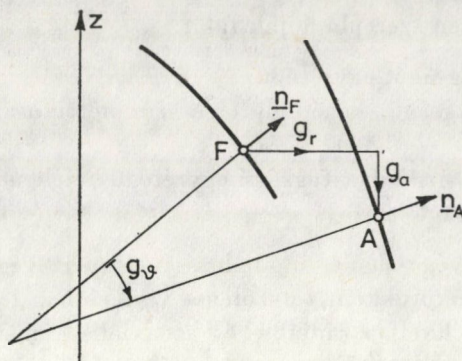


1. ábra

Amennyiben a szerkezet végeselemes modellezésével nyert F és A jelű csomókörök elmozdulásai között

$$\mathbf{q}_A = \mathbf{q}_F - \mathbf{g}_{FA} \quad (2.1)$$

összefüggés áll fenn, ahol $\mathbf{g}_{FA} = [g_r, g_a, g_\vartheta] = (\text{radiális, axiális szögelfordulásbeli hézag})$, akkor az F és A csomókörök ún. *kontakt párt* alkotnak (2. ábra).



2. ábra

A $g_{FA} = 0$ esetében nincs szükség a kontakt pár képzésére.

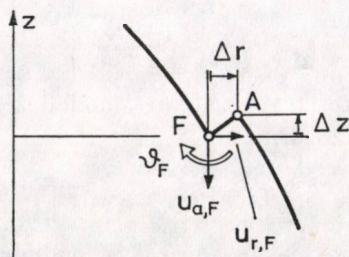
Kontakt párok az *elmozdulásmezőben és szögelfordulásmezőben fennálló szakadást* (pl. túlfedést) vannak hivatva kezelni. Ehhez egyrészt az F és A csomópontok kijelölésére, illetve az ID tömb megfelelő betöltésére van szükség.

Az ID tömb A -edik csomópontja akkor *alcsomópont*, ha legalább egy db koordinátája -1 -et tartalmaz, azaz $ID(A, J) = -1$, ha a J -edik koordináta a (2.1) összefüggés alapján alá van rendelve a főcsomópontbeli elmozdulásnak.

Excentrikus csatlakozásról beszélünk akkor, ha az A jelű csomópont és az F jelű csomópont közötti távolság az alakváltozás folyamán változatlan marad. Ily módon az F és A jelű csomópontok elmozdulásai között fennállnak (3. ábra) az

$$\begin{aligned} u_{r,A} &= u_{r,F} + \vartheta_F \Delta Z, \\ u_{a,A} &= u_{a,F} + \vartheta_F \Delta r, \\ \vartheta_A &= \vartheta_F \end{aligned} \quad (2.2)$$

összefüggések. Ismételten egyrészt $ID(A, J) = -1$, ($J = 1, 2, 3$) kötöttségi szám megadásával élünk, másrészt az A -hoz tartozó F főcsomópontot lerögzítjük.



3. ábra

Az ID tömb zérus koordinátáit növekvő sorrendben egytől kezdődő pozitív egészszámokkal kicserélve olyan információkhoz jutunk, amelyek alapján könnyen tisztázhatóvá válik az, hogy az egyes csomókörön levő ismeretlen általánosított koordináták az összes ismeretlen belül hanyadikak. Ezáltal a különböző szabadságfokú elemek a különböző szabadságfokú csomókörök esetén is könnyen illeszthetővé válnak.

További előny, hogy a potenciális energia minimuma elvből nyert algebrai egyenletrendszer mátrixán semmiféle átalakítást nem kell végrehajtani, mivel a kinematikai peremfeltételt, az elmozdulásmezőbeli szakadást stb. elemek szintjén figyelembe vettük, és így az egyenletrendszer mátrixának mérete az ID tömb átszámozásával megállapított ismeretlen elmozdulás koordináták számával fog megegyezni.

3. A rugalmas szerkezet anyaga

A rugalmas szerkezetet alkotó elemek, elemenként homogén, izotrop vagy anizotrop anyagúak lehetnek.

Az anyagállandók hőmérséklettől való függése esetében diszkrét hőmérséklet-értékhez tartozó anyagállandók ismeretében anyagállandók táblázata állítható elő. A számítógép az elem átlagos hőmérsékletéhez a megfelelő anyagállandó értékeket az említett táblázatból lineáris interpolációval veszi ki. A számítóprogramrendszer a szerkezetben kialakuló hőmérsékleteloszlást ismertnek tételezi fel. Ezek a bemenőadatok egyrészét képezik.

4. Terheléssel, falvastagsággal (rétegvastagsággal), anyagállandókkal stb. kapcsolatos típusosztályok

Az adatok előkészítését nagymértékben megkönnyíti és áttekinthetőbbé teszi, ha a terheléseket, falvastagságot stb. típusosztályokba soroljuk. Ezeket előzetesen beolvasva, az elemeknél már csak a típusszám megadása válik szükségessé.

A nyomási terhelési típust három szám jellemzi

$$p_0, \gamma^p, Z_p,$$

ahol p_0 a Z_p magasságban levő nyomás értéke, γ^p a folyadék fajsúlya. Így a nyomás tetszőleges Z helyen

$$p = p_0 + \gamma^p(Z_p - Z). \quad (4,1)$$

Hasonló a helyzet az axiális irányú gyorsulásnál is.

A rugalmas Winkler-típusú közeg rugóállandóját, a falvastagságot (rétegvastagságot) egyetlen egy szám jellemzi.

A tóruszalakú héjelemeket 5 db állandó (a középpont helykoordinátái, a meridián görbületi sugara, a kezdő- és végszőgek), míg a kúpszelet meridiánú héjakat az a , b , c állandók jellemzik. Ekkor

$$r(Z) = \sqrt{aZ^2 + bZ + c} \quad (4.2)$$

a héj paralel sugara.

Az anyag típusát a hőmérsékleti pontok száma, tömegsűrűsége és hőmérsékletenként az E rugalmassági tényezők, ν — Poisson-féle állandók és fajlagos hőtágulási együtthatók összessége jellemzi.

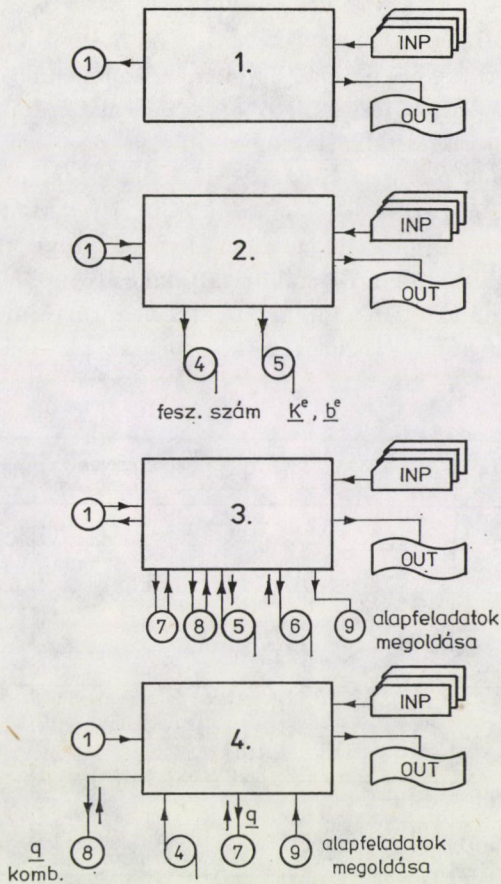
5. A programrendszer struktúrája

A Bevezetésben jelzett kívánalmaknak eleget tevő szilárdsági számításra alkalmas programrendszer négy részből épül fel (4. ábra).

Az *első rész* a csomókörök helykoordinátáinak, az ott fellépő elmozdulások kötöttségének, illetve a hőmérsékletnek a beolvasását, a zérustól különböző elmozdulások helyét és nagyságát, a ferdehatásvonalú görgős támasz helyét és irányszögét, az elmozdulásmezőben fennálló szakadások figyelembevételéhez szükséges ún. kontakt csomókörpárokat, az excentrikusan kapcsolódó elemek esetében a fő- és alsomóköröket, a tóruszalakú héj, illetve a kúpszeletek egyenletével megadott meridiánú héjtípusok megadásához szükséges adatokat, a rugalmas Winkler-típusú közegek állandóit, a rugalmas szerkezet forgási szögsebességét, illetve a különböző típusú elemek számát, a generális adatok beolvasását és azok ellenőrzését végzi el, végezetül a második rész futásához szükséges adatokat az 1 jelű file-ra írja ki. Az adatösszeállításban fellépő hibákat a gép kijelzi, továbbá lehetőség van a csomóköri helykoordináták megadásának automatizálására is, illetve az automatizálással beállított kötöttségek módosítására.

A *második rész* az 1 jelű file-ról történő visszaolvasás után az elemtípusokhoz tartozó általános adatokat olvassa be (pl. anyagállandók, terhelési típusok stb.) az input file-ról, majd elemcsoportonként előállítja az elemek merevségi mátrixát, terhelési vektorát, azokat az 5. háttérre írja, illetve a negyedik részben majdan számításra kerülő feszültségállapot meghatározására is háttérre ír. Egyidejűleg négyfajta nyomási-, kétfajta forgástengely-irányú gyorsulásból, forgásból, hőterhelésből, illetve kinematikai előírásokból származó terhelést vehet figyelembe a program elemenként. Ennek a résznek a biztonságos futását is számos adatellenőrzés segíti elő.

A *harmadik rész* az 1. file-ról történő visszaolvasás után a csomókörök mentén ható koncentrált terhelés beolvasását, az egyenletrendszer összeállítá-



4. ábra

sát és megoldását [4] végzi el, illetve az eredményeket a 9., a későbbiekben szükséges memória területeket az 1. háttérre írja a negyedik programrész számára.

A *negyedik rész* az algebrai egyenletrendszer megoldásának ismeretében, a felhasználó előírása szerint súlyozva összegzi a második és harmadik programban definiált alapfeladatok megoldásait, vagyis előllítja a kombinált feladatokat, az eredményeket csomókörönként kúrja, majd elemcsoportonként meghatározza az elemek feszültségi állapotát a felhasználó által definiált pontokban (metszetekben). A negyedik program további kombinált feladatok elvégzése céljából újból indítható.

A fentiek alapján a TESZGA programrendszer háttérigényét a 4. ábra szemlélteti. Nagyméretű feladatoknál a 4–6 file-ok mágnesszalagot jelentenek.

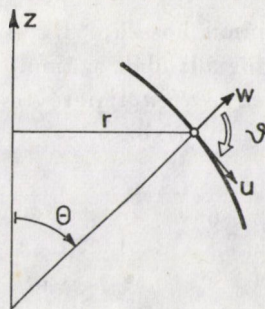
6. Elemkönyvtár

Az elemkönyvtárat vékonyfalú héjelemek, izoparametrikus gyűrűelemek, gyűrűelemek, gyűrű mint görbe tartó és axiális és radiális húzott-nyomott rugók, illetve torziós rugók alkotják.

6.1. A héjelemek geometriájuk és a héj falának felépítése szerint 11 féle típusba soroltak (5. ábra). A héjelemhez kötött helyi koordináta-rendszerben csomópörönként az u tangenciális, w normális elmozdulás és ϑ szögelfordulás-mezők értékei szolgáltatják a csomópöröi általánosított elmozdulásvektor elemeit (6. ábra). Így, ha az elem a forgástengelyt nem tartalmazza, az elem minimális szabadságfoka hat lesz, ellentétes esetben az $r = 0$ helyen levő globál-

Meridián		Min. szabadságfok	Falvastagság	Elem altípus száma
lemez-tárcsa		4	állandó változó	1 4
kúp		4	állandó változó	2 5
henger		6	állandó változó	3 6
csonkakúp (körgyűrű)		6	állandó változó	7
tórusz (gömb)		4 6	állandó változó	8
kúpszelet		6	állandó változó	9
általános $r = r(Z)$		6	állandó változó	10
általános $Z = Z(r)$		6	állandó változó	11

5. ábra



6. ábra

rendszerbeli u , radiális elmozdulás és ϑ szögelfordulás zérus értéke miatt csak négy. Ezt az elemet szinguláris elemnek nevezzük.

Az 1–8. típusú elemeknél a héjelem középfelületének elmozdulásmezőjét az elem valamelyik elsőnek tekintett csomópontjától mért s ívkoordináta függvényében

$$\tilde{\mathbf{u}}^e(s) = \begin{bmatrix} u(s) \\ w(s) \end{bmatrix}^e = \Phi^e(s) \mathbf{a}^e + \tilde{\Phi}^e(s) \tilde{\mathbf{a}}^e \quad (6.1)$$

alakban közelítjük, ahol $\Phi^e(s)$, $\tilde{\Phi}^e(s)$ alapfüggvénytáblák, \mathbf{a}^e az elem minimális szabadságfokával azonos számú állandókat tartalmazó vektor, $\tilde{\mathbf{a}}^e$ pótlólagos állandók vektora [5].

Az alapfüggvénytáblák egyszerűen görbült elemek esetében szinguláris elemnél

$$\Phi^e(s) = \begin{bmatrix} -\operatorname{tg} \Theta & s & 0 & 0 \\ 1 & 0 & s^2 & s^3 \end{bmatrix}^e, \quad (6.2)$$

nem szinguláris elemnél

$$\Phi^e(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix}^e, \quad (6.3)$$

míg a magasabbrendű közelítés érdekében használt $\tilde{\mathbf{a}}^e$ állandókhoz tartozó $\tilde{\Phi}^e(s)$ mátrixszal az u mező esetében $\text{NPU}+1$ -ed fokú, w mezőnél $\text{NPW}+3$ -ad fokú teljes polinommal történő közelítés biztosítható [6]

$$\tilde{\Phi}^e(s) = \begin{bmatrix} \dots s^{n+1}/S^{n+1} \dots & \mathbf{O}^T \\ \underbrace{\mathbf{O}^T}_{\text{NPU}} & \underbrace{\dots s^{k+3}/S^{k+3} \dots}_{\text{NPW}} \end{bmatrix}^e \quad (6.4)$$

ahol S — a héjelem meridiánjának hossza, NPU és NPW az u és w mezők közelítésénél használatos pótlólagos állandók száma.

Kétszeresen görbült elemek esetében a merevtestszerű elmozdulást pontosan figyelembe vevő alapfüggvény-mátrixok szinguláris elemnél

$$\Phi^e(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 1 & s^2 & -\cos \Theta \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

nem szinguláris elemnél

$$\Phi^e(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & \sin \Theta \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & -\cos \Theta \end{bmatrix}^e. \quad (6.6)$$

A $\tilde{\Phi}^e(s)$ a (6.4) analógiája alapján könnyen felépíthető. A 10. és 11. típusú héjak esetében az approximáció lényegében ugyanaz, csak s helyett \tilde{Z} , illetve \tilde{r} írandó. Itt $\tilde{Z} = Z - Z_{\text{kezd}}$ ($\tilde{Z} \leftrightarrow \tilde{r}$), ($Z \leftrightarrow r$).

Az 1–8. típusú héjelemek esetében a K^e merevségi mátrix és a b^e terhelési vektor előállításához a számítási algoritmus egyszerűsítése céljából az a^e vektor a helyi koordinátarendszerben értelmezett q^e csomókörü általánosított elmozdulásvektoron keresztül nyert kifejezést. Ekkor a (6.1) helyett formailag

$$\tilde{u}^e(v) = \bar{A}^e(v) q^e + \tilde{A}^e(v) \tilde{a}^e \quad (6.7)$$

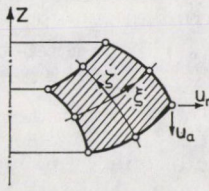
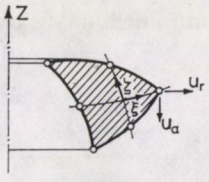
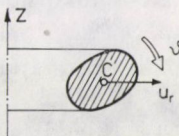
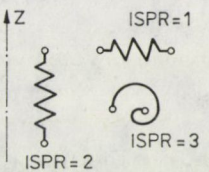
írható, ahol $\bar{A}^e(v)$, $\tilde{A}^e(v)$ approximációs mátrixok, $v \equiv s$.

A feszültségek meghatározására a módszer az összes héjelem típusnál a (6.7) alatti approximációra támaszkodik [6].

6.2. Izoparametrikus gyűrűelemek az irodalomból jól ismert elvek alapján épülnek fel [1] (7. ábra). A számítóprogram felépítése lehetővé teszi, hogy excentrikus csatlakozás megadás segítségével az izoparametrikus elemet vékonyfalú héjelemhez csatoljuk, továbbá hasonlóan mint a hég és rugó elemeknél az elmozdulásmezőben fennálló szakadást (pl. túlfedés, csavarok előfeszítése) figyelembe vesszük, adott elmozdulást, ferdehatásvonalú görgős támaszt pontosan kezeljünk.

A felsoroltak alapján lehetőség van a héjak csatlakozásánál (zavarásánál) a feszültségállapot pontosabb meghatározására (a csatlakozás közvetlen környezetét izoparametrikus elemekkel, míg a távolabbi részeket vékonyfalú elemekkel modellezzük), továbbá számíthatóvá válnak a bonyolult kialakítású szerkezeti elemek közötti túlfedésből, szerelési pontatlanságból származó feszültségek.

6.3. Gyűrűelem (mint görbetartó)-ként kis magasságú bordák, karikák modellezése oldható meg. A gyűrűben a radiális irányú elmozdulásból és a keresztmetszet merevtestszerű elfordulásából származik alakváltozási energia, így az elem szabadságfoka kettő (7. ábra).

		Szabad- sádfok
Izoparametrikus gyűrűelemek		16
		12
Gyűrű, mint görbétartó		2
Rugó elemek		2

7. ábra

6.4. Rugóelemek az elemkönyvtár legegyszerűbb elemei (7. ábra). A tengelyirányú rugóelemeket használhatjuk csavarok, hőcserélők csőkötegeinek stb. modellezésére. Hőterhelés itt is felléphet, az elemek excentrikus csatlakozása megengedett.

6.5. Általános megjegyzések. A héjelemek közül az 1–3. típusúaknál a \mathbf{K}^e merevségi mátrixot, \mathbf{b}^e terhelési vektort zárt alakban állítjuk elő, míg a megmaradóknál Gauss-féle numerikus integrálással. Általában a \mathbf{K}^e és \mathbf{b}^e -t először a lokális koordinátarendszerben, majd transzformálás után a globális rendszerben állítjuk elő. Amennyiben

1. az elem kontakt alcsomókört tartalmaz;
2. az elem excentrikusan csatlakozik;

3. az elem valamelyik csomóköreén adott az elmozdulás valamelyik koordinátája;
4. az elemhez ferdehatásvonalú görgős támasz csatlakozik, további transzformációk végrehajtására kerül sor a felsorolt sorrendben.

7. Az elmozdulás-, szögelfordulás mezőben fennálló szakadás figyelembevétele

Jelölje az e jelű elem alsomóköreihez tartozó általánosított elmozdulásvektort \mathbf{q}_A^e , míg a főcsomókörbelieket \mathbf{q}_F , továbbá az elem megmaradó elmozdulásvektorát \mathbf{q}_m^e . A (2.1) alapján formálisan azt írhatjuk, hogy

$$\mathbf{q}_A^e = \mathbf{q}_F + \mathbf{g}_{FA}, \quad (7.1)$$

ahol \mathbf{g}_{FA} — a főcsomókörtől az alsomókörhöz mutató kezdeti hézagokból összeállított vektor.

Felírva az e jelű elem potenciális energiáját, azaz a

$$\Pi^e = \Pi^e(\mathbf{q}_A^e, \mathbf{q}_m^e) = 1/2 [\mathbf{q}_A^{e,T}, \mathbf{q}_m^{e,T}] \left(\mathbf{K}^e \begin{bmatrix} \mathbf{q}_A^e \\ \mathbf{q}_m^e \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A^e \\ \mathbf{b}_m^e \end{bmatrix} \right),$$

összefüggést, majd azt (7.1) figyelembevételével átalakítva, a minimalizálás szempontjából lényegtelen \mathbf{g}_{FA} -ból származó tagot elhanyagolva

$$\Pi^e = \Pi^e(\mathbf{q}_F, \mathbf{q}_m^e) - [\mathbf{q}_F^T, \mathbf{q}_m^{e,T}] \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA}^e \\ \mathbf{K}_{Am}^e \end{bmatrix} \mathbf{g}_{FA} \quad (7.2)$$

kifejezéshez jutunk. Így módon a módosított terhelési vektor

$$\mathbf{b}_{\text{mód}}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_A^e \\ \mathbf{b}_m^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA}^e \\ \mathbf{K}_{Am}^e \end{bmatrix} \mathbf{g}_{FA}. \quad (7.3)$$

Az eredményekből látható, hogy az elem potenciális energiája a főcsomókörbeli és a megmaradó általánosított elmozdulásokon keresztül nyer kifejezést, de úgy, hogy az alsomókörhöz tartozó általánosított elmozdulásvektornak megfelelő merevségi mátrix oszlopok \mathbf{g}_{FA} szakadás értékkel vett szorzatát az eredeti redukált terhelési vektorhoz hozzá kell adni. Számítástechnikailag a (7.3) alatti módosítást az elemhez kapcsolódó számításoknál végezzük el. Mivel a szerkezet szilárdságtani viszonyait egy futással — többfajta terheléssel — kívánjuk általában tisztázni, a terhelésekből származó állapotok szuperponálhatósága miatt, a \mathbf{g}_{FA} -hoz tartozó kinematikai terhelést az egyenletrend-

szer jobboldalán külön kell szerepeltetni. Így a különböző terhelésekhez tartozó állapot a kinematikai terhelés nélküli és a kinematikai terhelés által kapott állapotok összegeként áll elő.

8. Adott elmozdulás, excentrikus csatlakozás, ferdehatásvonalú görgős támasz figyelembevétele

8.1. A zérustól eltérő adott elmozdulást az elem szintjén, a merevségi mátrix adott elmozdulás koordinátához tartozó oszlopának megszorzásával előálló vektor mínusz egyszeresének a terhelési vektorhoz történő hozzáadásával (vagy külön terhelési vektorként való szerepeltetésével) vesszük figyelembe.

8.2. Excentrikus csatlakozás esetében csomókörönként a (2.2) alapján összeállított transzformációs mátrixszal az alcsomókörök elmozdulása a főcsomókörbelivel nyer kifejezést.

Ennek felhasználásával az elem potenciális energiája is a főcsomókörbeli elmozdulásokkal kifejezhető. Ez a merevségi mátrix és a terhelési vektor transzformálását jelenti.

8.3. Ferde hatásvonalú görgős támasznál a globális rendszerbeli elmozdulást a görgő elmozdulásának irányába eső elmozdulással fejezzük ki. Az így előállított transzformációs mátrix segítségével formálisan a 8.2. pont alatti szorzások elvégzése válik szükségessé.

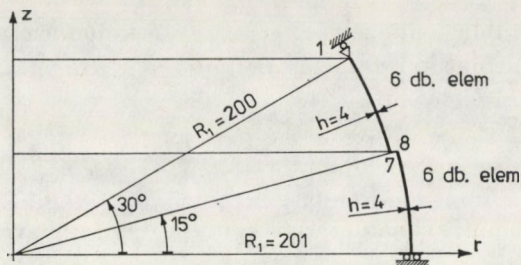
9. Néhány számpélda

A programrendszerrel megoldott feladatok közül ragadjunk ki két feladatot:

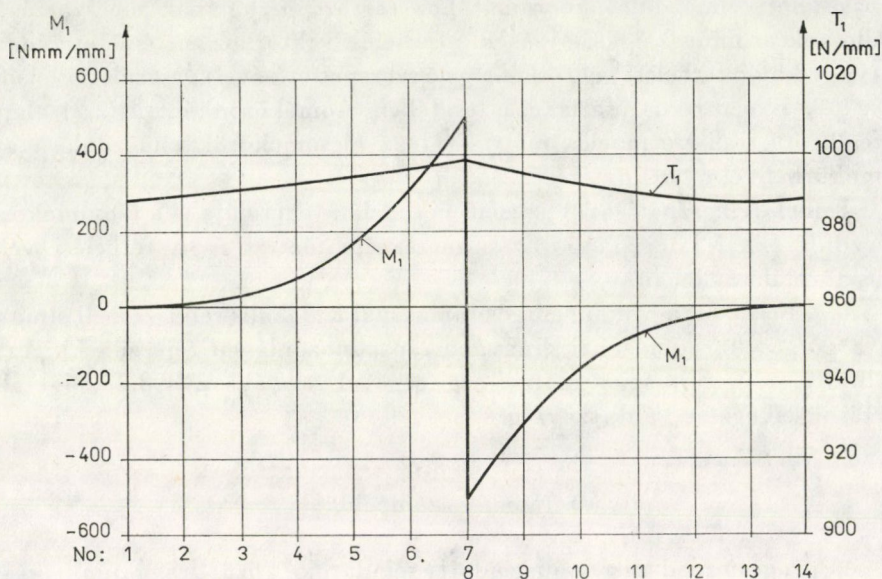
9.1. Vizsgáljuk a 8. ábrán vázolt mérethibával rendelkező gömböt. Hiba az R görbületi sugárban beálló szakadásból adódik (gyártási pontatlanság). Ezt a hibát excentrikus csatlakozással tudjuk modellezni. A p belső nyomásnál ébredő T_1 , M_1 meridiánirányú belső erő és nyomaték ívhossz menti változását a 9. ábra tünteti fel. (Anyagállandók: $E = 2,05 \cdot 10^5$ N/mm²; $\nu = 0,3$) Amíg a Huber—Mises—Henky szerint számított redukált feszültség alak-hiba nélküli esetben $\sigma_{red}^+ = 250$ N/mm², addig az excentrikus csatlakozás fő- és alcsomókörénél a $+$ (külső) és $-$ (belső) felületen az (i) jelű csomókörnél $\sigma_{red}^+(7) = \sigma_{red}^-(8) = 390$ N/mm²; $\sigma_{red}^-(7) = \sigma_{red}^+(8) = 172$ N/mm² nagyságú feszültségek lépnek fel. Vagyis a görbületi sugár változásának 0,5%-os értéke a σ_{red} feszültségnél $390/250 \cdot 100 = 156\%$ -os változást okoz.

A bemutatott egyszerű példa is jól mutatja, hogy a szerkezetek geometriájának pontos modellezése — a feszültségállapot megbízható számítása szempontjából — nagyon fontos. A felvett gömbelemeknél a $\Delta\theta$ szögváltozás $2,5^\circ$, és így $NPU = 1$, $NPW = 2$ számú pótlólagos állandó felvétele az elemek közötti elmozdulásmező folytonosságán túl az $R_1 = 200$ és $R_2 = 201$ mm-es gömbökön a feszültségi tenzormező folytonosságát jól biztosítja. Kevesebb állandó már nem szolgáltatja a szükséges folytonosságot, míg a pótlólagos állandók számának emelése az elem kis ívhossza miatt beálló merevségi mátrix rossz kondicionáltsága következtében — a megoldást pontatlanná teszi. Annak illusztrálására, hogy a pótlólagos állandók felvételének a nagyméretű elemeknél van értelme, vegyük a következő példát.

9.2. Vizsgáljuk a 10. ábrán található geometriájú és 7 db elemmel modellezett szerkezetet. (Anyagállandók: $E = 2,1 \cdot 10^5$ N/mm²; $\nu = 0,3$.) Mindegyik elemnél $NPU = NPW = 5$. Az elemek határán a csomóköröknél meghatározott redukált feszültségbeli szakadások maxi-



8. ábra



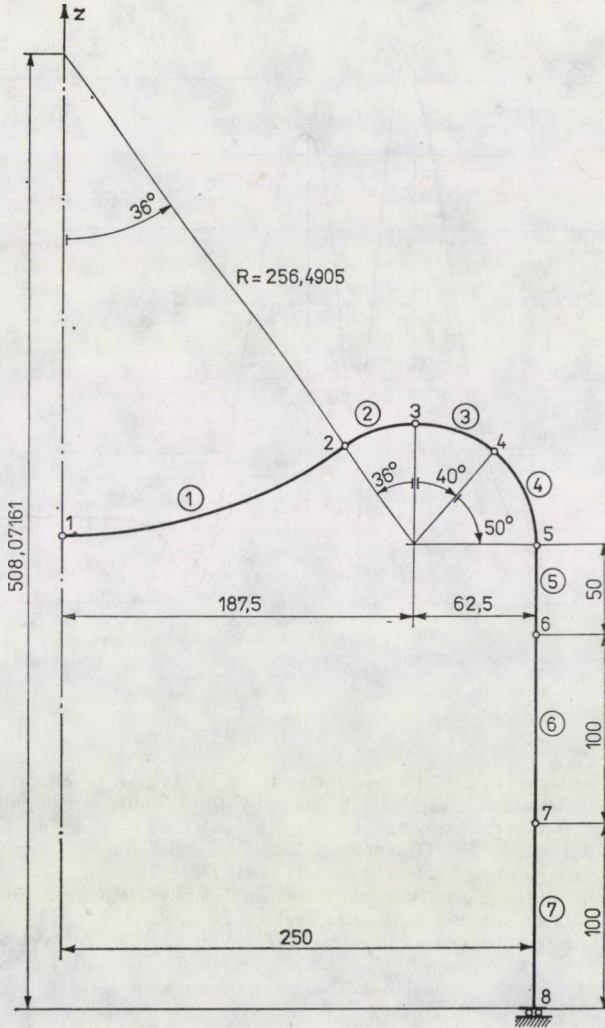
9. ábra

mumát a 2-es csomópontnál a tartály belső felületén tapasztaljuk, aminek értéke az 1%-ot sem éri el. A kapott megoldást pontosnak vehetjük. Ugyanezen feladatot elemsűrítéssel, illetve kisméretű elemeknél ($\Delta\theta = 10^\circ$) a pótlólagos állandók számának csökkentésével is megoldva a kapott megoldások a bemutatott, modellezéssel gyakorlatilag azonosak voltak. A tartály-fenék belső felületén ébredő redukált feszültség változását a 11. ábra tünteti fel.

10. Néhány megjegyzés

A TESZGA programrendszert az OMFB támogatásával a Nehézipari Műszaki Egyetem Mechanikai Tanszéke az MTA SZTAKI CDC-3300-as számítógépre dolgozta ki.

A programrendszer bármilyen intézmény, vállalat rendelkezésére áll, azt gépidő bérlésével használhatja. A TESZGA-val kapcsolatos részletesebb információk, a beolvasási utasítások, számos mintapéllda kapcsán kapott számítási tapasztalatok a [2]-ben találhatók. További információkat készséggel szolgáltat a NME Mechanikai Tanszéke.



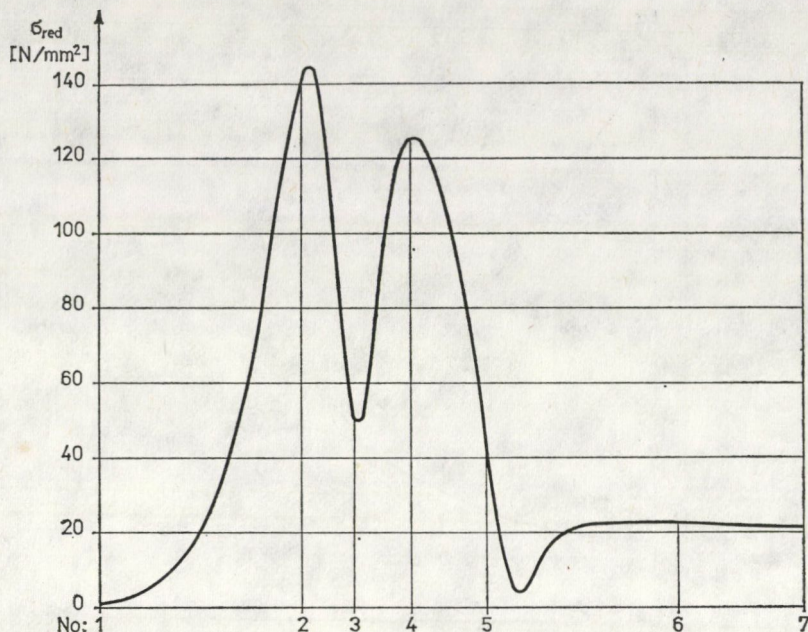
10. ábra

Köszönetnyilvánítás

A programrendszer megszületését nagymértékben elősegítette az NME Mechanikai Tanszékének OMFB által történő támogatása. A szerző köszönetét fejezi ki mindazon kollégáknak, akik az elemekhez tartozó összefüggések előállításában, ellenőrzésében és a programozási munkákban résztvettek. Ezek: Dr. Égert J., Ficsor L., Dr. Forrai L., Harmati Iné., Dr. Herpai B., Kerekes I., Dr. Kozák I., Maár Gy., Nándori F., Pödör A., Dr. Sárközi L., Dr. Szilassy I., Dr. Szeidl Gy., Varga Gy. és Visnyei Lné.

IRODALOM

1. ZIENKIEWICZ, O. C.: The finite element method in Engineering Science, McGraw-Hill, London 1971
2. TESZGA tengelyszimmetrikus geometriájú és alakváltozású lineárisan rugalmas szerkezetek szilárdságtani számítására alkalmas programrendszer, NME. Mechanikai Tanszék, Miskolc 1980



11. ábra

3. BATHE, K. J.—WILSON, E. L.—PETERSON, F. E.: SAP IV. A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems. College of engineering, University of California, Berkely, California, Report No EERC 73—11, 1974
4. WILSON, E. L.—BATHE, K. J.—DOHERTY, W. P.: Direct Solution of Large Systems of Linear Equations, *Computer and Structures*, 4 (1974), 699—728
5. HERPAI, B.—PÁCZELT, I.: Analysis of Axisymmetrically Deformed Shells by the Finite Element Displacement methods, *Acta Techn. Hung.* 85 (1977), 93—122
6. „Általános rendeltetésű programkönyvtár a végelemek módszerével történő szilárdsági számításokhoz”, A Nehézipari Műszaki Egyetem Mechanikai Tanszékének az OMFB megbízásából végzett Szm. 78-XXVIII-1/1978. számú kutatás-fejlesztési munkáról szóló 1. és 2. beszámolója. Miskolc, 1978—1979

Finite Element Program System TESZGA for the Strength Calculation of Structures of Axisymmetrical Geometry and Deformation. — The construction of the program system TESZGA, the 11 kinds of thin-walled shell members to be used for the finite-element simulation, the isoparametric ring-shaped units, the ring (as a curved beam) and the program library containing the spring element are dealt with. The calculation technique with consideration of the rupture to be found in the field of displacement is treated. Numerical problems for the strength calculation of structures made from thin-walled shell units are presented.

Elementenprogrammsystem TESZGA zur Festigkeitsberechnung von Konstruktionen mit achsensymmetrischer Geometrie und Verformung. — Es werden die Konstruktion des Programmsystems TESZGA, die zur Modellierung anwendbaren elf Gattungen von dünnwandigen Schalenelementen, die isoparametrische ringförmige Elemente, Ringe (als gekrümmte Träger), Federelemente enthaltende Elementenbibliothek kurz behandelt. Die rechnungstechnische Behandlung der Rücksichtnahme des im Verschiebungsfeld stattfindenden Risses wird untersucht und Zahlenbeispiele zur Festigkeitsberechnung der aus dünnwandigen Schalenelementen hergestellten Konstruktionen werden angeführt.

ELKEVEREDÉSI VIZSGÁLATOK A DUNÁN

KONTUR ISTVÁN *

[Beérkezett: 1981. augusztus 12-én]

A BME Vízgazdálkodási és Vízépítési Intézetében több éve végeznek a Dunába kerülő szennyeződések elkeveredésére vonatkozó vizsgálatokat. A szennyező anyagok keresztirányú és hosszirányú elkeveredésére és szétterülésére véletlen bolyongási modellt alkalmaztunk [1]. Ebben a tanulmányban folytattuk a valószínűségi gondolatmenet kiterjesztését: a diszperziós tényező keresztirányú változásának, a keresztirányú áramlások és a vízmélység változásának hatását vizsgáltuk. A bolyongási modell két speciális alkalmazását mutatjuk be: az egyik az az eset, amidőn a folyóban szigetek is vannak, a másik, amidőn partközeli szennyezőanyag bevezetéséről van szó. A számítások két dimenzióban vizsgálják az elkeveredés folyamatát, függőleges integrál-átlagokkal, ami széles folyók esetén, mint a Duna magyarországi szakasza, megengedhető közelítés.

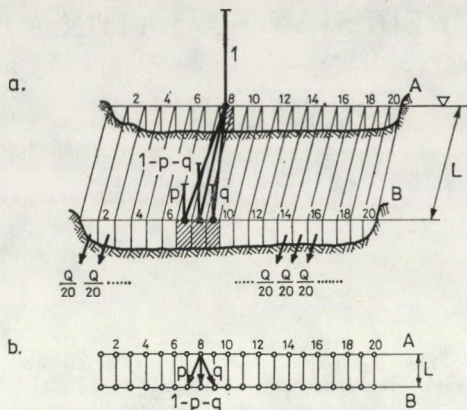
1. A bolyongási modell fizikai alapjai

A bolyongási modell alkalmazását a szennyezőanyag elkeveredésére már a „Sztochasztikus keveredési modell a Paks-alatti Duna-szakaszra” című tanulmányban bemutattuk [1]. Az alkalmazott modell alapgondolata az volt, hogy a vízrészecskék és ezzel együtt a szennyezett részecskék is véletlenszerű mozgást végeznek.

A bolyongási modell alkalmazásának első lépéseként fel kell venni a rács-pontokat, ami az áramlási tér felosztását jelenti. Második lépésben meg kell határozni az állapotátmenet valószínűségi mátrixot, méretét és paramétereit.

Tekintsünk egy folyó \mathcal{A} – \mathcal{B} szakaszát, ahol a két szelvény egymástól L távolságra van (1. ábra). A teljes keresztiselvényt felosztjuk n egyenlő részre, mégpedig n egyenlő vízhozamszállítású részre. Az 1. ábrán $n = 20$, így a teljes Q vízhozam huszadrészeit szállítják az egyes lamellák. Feltételeztük, hogy mélység a szélességhez viszonyítva elhanyagolható — ami a Duna magyarországi szakaszára igaz is — és így a huszadokat elválasztó síkok függőlegesnek képzelhetők. Látjuk majd később, hogy a keresztirányú áramlások figyelembevételéhez ezt a feltételt valamilyen más úton meg kell kerülnünk. Ha a folyószakaszt felosztottuk n egyenlő vízszállítású — egyenvízszállítású — részre, akkor ezek az n rácsponthoz kijelöljük az \mathcal{A} szelvényben és a \mathcal{B} szelvényben is (1.b. ábra). A kontinuitás következtében a Q vízhozam az \mathcal{A} és a \mathcal{B} szelvényben is ugyan-

* Dr. Kontur István, 1021 Budapest, Kuruclesi u. 44. BME Műegyetem rkp. 3–4.



1. ábra. A folyó keresztmetszvény felosztása egyenlő vízhozamú sávokra, a) elkeveredés szemléltetése; b) az elkeveredés gráf reprezentációja

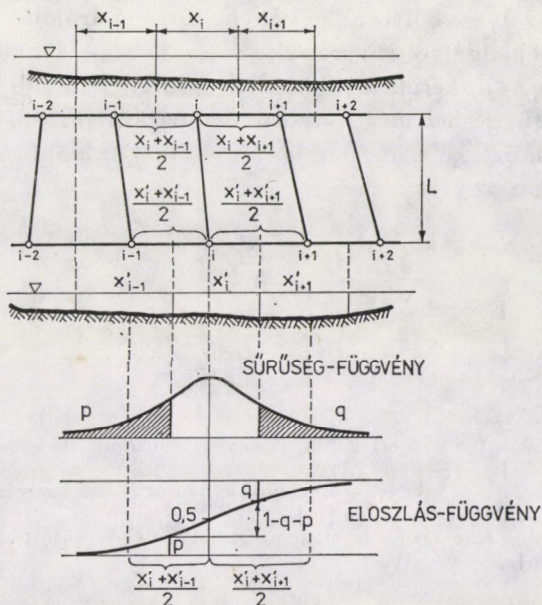
annyi, tehát a rácspontok száma is megegyezik. A rácspontok felvétele után határozzuk meg az $(n \cdot n)$ -es átmenetvalószínűségi mátrix, P elemeit. A valószínűségi megközelítés különböző szemléletű megfogalmazást tesz lehetővé. Ha a szennyezőanyag 1 valószínűséggel a i . egyenvízszállítási sávban van az α szelvényben, akkor β szelvénybe érve a szennyezőanyag p valószínűséggel kerülhet az $(i-1)$. egyenvízszállítási sávba és q valószínűséggel az $(i+1)$. egyenvízszállítási sávba, valamint $1-p-q$ valószínűséggel maradhat a i . egyenvízszállítási sávban. (Az 1. ábrán $i = 8$ -at jeltöltük be.)

Az a felvétel, amely szerint a szennyező anyag az L szakaszon csak az eggyel jobbra és az eggyel balra levő egyenvízszállítási sávba kerülhet át, azt jelenti, hogy az L távolság és az egyenvízszállítási sáv szélessége közötti arány, és a diszperziós tényező kapcsolata olyan, hogy a szennyezőanyag szétterjedése nem lép túl egy egyenvízszállítási sávra, illetve csak olyan kis valószínűséggel, ami a számítások szempontjából elhanyagolható.

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha feltételezzük, hogy az i . egyenvízhozamú sávban a szennyezőanyag koncentrációja az α szelvényben c_i^A [mg/l], akkor a β szelvényben a c_{i-1}^B , c_{i+1}^B és c_i^B [mg/l] lesz a koncentráció értéke és a szennyezőanyagra felírható anyagmegmaradási mérleg alapján

$$\frac{Q}{n} c_i^A = \frac{Q}{n} c_{i-1}^B + \frac{Q}{n} c_{i+1}^B + \frac{Q}{n} c_i^B.$$

Ebből azt kapjuk, hogy koncentrációk értékei egy dimenziós szorzókonstanstól eltekintve az átmeneti valószínűségekkel egyeznek meg; ahol ez a konstans éppen c_i^A [mg/l]. A fenti egyszerű számítás abból is adódik, hogy éppen egyenvízszállítási (Q/n) sávokat vettünk fel, aminek hasznát a fentiekből is láthatjuk. Ezt az előnyt az eredmények kiértékelésekor is közvetlenül hasznosítani fogjuk,



2. ábra. A p és q valószínűségek meghatározása az egyenvízhozamú sáv szélességei alapján

mivel a valószínűségi érték egyúttal a koncentrációk értékét is megadja. Nem azonos vízszállítási sávok felvétele esetében a számítás bonyolultabb. Megjegyezzük, hogy a kétféle számítás azonosságának mélyebb okai vannak és ez a valószínűségszámítás egyfajta linearitásának a következménye: az eredmény nem függ a minták elemeinek számától, és ugyanígy — legalábbis egy bizonyos tartományon belül — a szennyezőanyag tömegétől sem függ az elkeveredés folyamata.

Az egyenvízszállítású sávokra történő felosztás természetes velejárója az, hogy a sávok szélessége szelvényen belül és szelvényről-szelvényre is különböző. A 2. ábrán rajzoltuk meg az $(i-1)$, i és $(i+1)$ egyenvízhozamú sávokhoz tartozó csomópontokat. Az egyenvízhozamú sáv szélessége x_{i-1} , x_i és x_{i+1} a felső α szelvényben és x'_{i-1} , x'_i , x'_{i+1} az alsó β szelvényben. A vízszállító sávokat a csomópontokon áthaladó vonalaknak elképzelve a β szelvényben a bal oldali távolság $(x'_i + x'_{i-1})/2$, a jobb oldali távolság pedig $(x'_i + x'_{i+1})/2$. Homogén elkeveredési viszonyokat feltételezve az i egyenvízhozamú sávból jobbra és balra is $x'_i/2$ távolságra lép ki a szennyezőanyag, ami azt jelenti, hogy $q = p$, szimmetrikus esettel állunk szemben. Homogén elkeveredési viszonyokat a Gauss-féle normál eloszlásfüggvénnyel lehet jellemezni. Így $\varphi(x)$ sűrűségfüggvény és $\Phi(x)$ eloszlásfüggvény mellett

$$p_i = q_i = 1 - \Phi\left(\frac{x'_i}{2\sigma_i}\right), \quad (1a)$$

ahol p_i és q_i az \mathcal{A} szelvényből a \mathcal{B} szelvénybe történő áramlás esetére felírandó átmenetvalószínűségi mátrix i . sorának $(i-1)$. és $(i+1)$. eleme, a főátlóba természetesen $1 - q_i - p_i$ kerül, a többi elem nulla.

A fenti összefüggésben még σ_i szorul magyarázatra, ami a normális eloszlás szórása. A szórás értékét a diszperziós tényezőtől az alábbi összefüggés segítségével kaphatjuk:

$$D_i = \frac{\sigma_i^2 \bar{v}_i}{2 \cdot L}, \quad (2a)$$

vagyis

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{2 \cdot L \cdot D_i}{\bar{v}_i}}, \quad (2b)$$

ahol D_i — a diszperziós tényező értéke az i . egyenvízhozamú sávban az \mathcal{A} — \mathcal{B} szelvény között $[\text{m}^2/\text{s}]$
 \bar{v}_i — az átlagsebesség az i . egyenvízhozamú sávban az \mathcal{B} — \mathcal{A} szelvény között $[\text{m/s}]$
 L — az \mathcal{A} — \mathcal{B} szelvény távolsága $[\text{m}]$
 σ_i — a szétterülés, elkeveredés mértéke az \mathcal{A} — \mathcal{B} szelvény között az i . egyenvízhozamú sávban $[\text{m}]$

Abban az esetben, ha az \mathcal{A} — \mathcal{B} szakaszt H_i vízmélység és x_i szélességi méret jellemzi az i . egyenvízhozamú sávban a folyó teljes vízhozama Q és ha ugyanakkor n egyenlő vízhozamú sávot vettünk fel, akkor p_i és q_i kifejezhető az alábbi formában:

$$p_i = q_i = 1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{x_i}}{2\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{\frac{Q}{L \cdot H_i \cdot D_i}} \right). \quad (1b)$$

A gyakorlati számításoknál minden esetben úgy jártunk el [2, 3], hogy az egyenvízhozamú sávokra való felosztáskor, x_i meghatározásakor a \bar{v}_i függélyközépsébséget vettük fel, mégpedig úgy, hogy előzőleg a \bar{v}_i függélysebség és a vízmélység között az alábbi

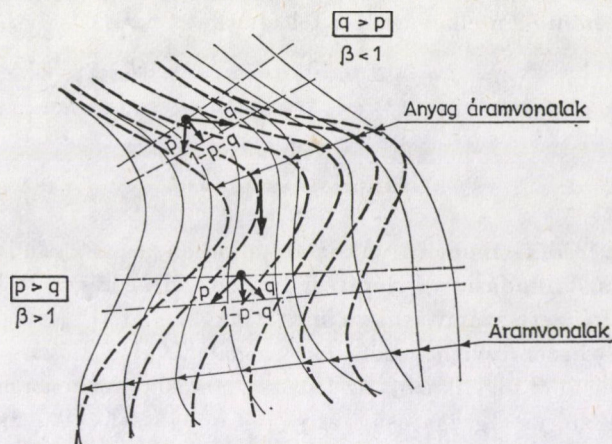
$$\bar{v}_i = a H_i^b \quad (3)$$

nemlineáris összefüggést határoztuk meg, ahol a és b állandók voltak egy-egy folyószakaszra. A (3) összefüggés szerint az egyenvízhozamú sáv szélessége

$$x_i = \frac{Q}{naH_i^{1+b}}. \quad (4)$$

Ennek figyelembevételével p_i , q_i számítására az alábbi egyszerűbb képletet kaptuk:

$$p_i = q_i = 1 - \Phi \left(\frac{1}{2n} \cdot \frac{Q}{H_i} \cdot \sqrt{\frac{1}{2 \cdot a \cdot L \cdot H_i^b \cdot D_i}} \right). \quad (1c)$$



Kersztirányú áramlás mérőszáma; $\beta = \frac{p}{q}$

$\beta < 1$ balrasodródás eseté

$\beta > 1$ jobbrasodródás esete

3. ábra. A keresztirányú áramlások figyelembevételének módja

Így rögzített vízhozam (Q) és szakasz hossz (L) esetében csak a vízmélységet és a diszperziós tényezőt kell a térképről levenni. Természetesen, hely kijelöléséhez és az ábrázoláshoz az x_i értékekre is feltétlenül szükség van [4].

A fentiekben említettük, hogy az elkeveredést csak vízszintes síkban vizsgálva, nincs módunkban a keresztirányú áramlások figyelembevételére, pedig valószínű, hogy ezek az áramlások a szennyezőanyag mozgási pályáját és elkeveredését is jelentősen befolyásolják. Az előzőekből az is kitűnik, hogy egy-egy egyenvízhozamú sávban — szakasról szakaszra homogén elkeveredési viszonyokat tekintve a $p = q$, vagyis az átmenetvalószínűségi mátrix szimmetrikus, ami az általános megoldás szempontjából kedvező [1], de a valóságban lezajló folyamatokkal ez nem mindig egyezik. Ezért a p/q viszony jellemzésére

$$\beta = \frac{p}{q} \quad (5)$$

hányadost vezettük be. Ha $p > q$, akkor $\beta > 1$, ha pedig $p < q$, akkor $\beta < 1$. Ezzel a szennyezőanyag jobbra, illetve balra sodródását tudtuk modellezni (3. ábra). A hidraulikai alapon megrajzolható áramvonalak, vagy egyenvízhozamú sávok helyett így képzeletbeli anyagáramvonal sávok rajzolhatók.

Ugyancsak minden szelvényben jellemezni lehet az elkeveredési viszonyokat a

$$\lambda = p + q \quad (6)$$

összeggel, ami homogén elkeveredési feltételeket tekintve

$$\lambda = 2q = 2p, \text{ illetve } q = p = \lambda/2$$

alakban írható fel.

2. Gyakorlati számítások

Az elkeveredési modell gyakorlati alkalmazását a Budapesti Műszaki Egyetem Vízgazdálkodási és Vízépítési Intézete által készített két megbízásos munka során végzett számításokon mutatjuk be [2, 3]. Az egyik esetben az Észak-budapesti szennyvízbevezetések vizsgálatával a Fővárosi Csatornázási Művek megbízásából foglalkozott az Intézet, a másik esetben a munka a Közép-Dunavölgyi Vízügyi Igazgatóság anyagi támogatásával a Szabadegyházán épülő Kukorica és Szeszgyár tisztított szennyvizeinek partközeli bevezetésével volt kapcsolatos. A szennyvízbevezetések környezeti hatásaira, a Duna vízminőségének lehetőségeihez mért védelméről nem szükséges részletes elemzésbe bocsátkozni [4]. Az alábbiakban csak az elkeveredéssel kapcsolatos modellezés részleteit tanulmányozzuk.

Az előző pontban láttuk, hogy az első lépés az egyenvízhozamú sávok meghatározása. Az észak-budapesti szennyvízbevezetés modellezésekor a teljes keresztshelvény 20 részre osztottuk fel, vagyis $Q/20$ egyenvízhozamú sávot határoztunk meg. Az egyenvízhozamú sávok meghatározásának eljárását a 4. ábrán mutatjuk be.

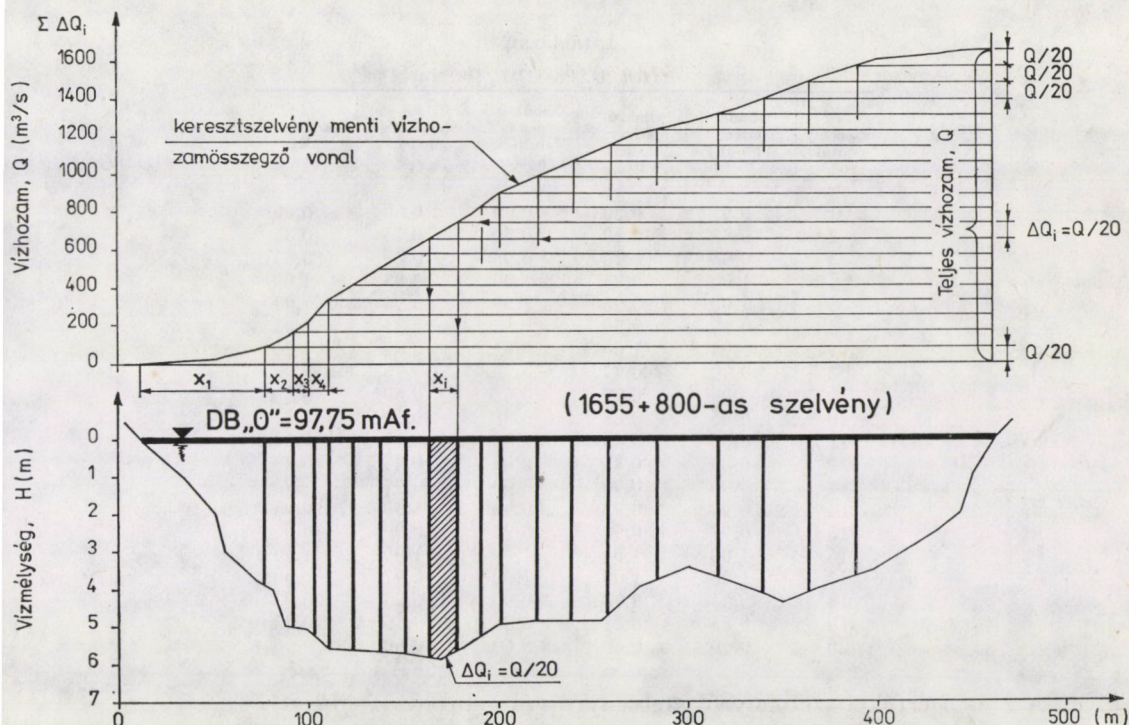
A Budapest feletti Duna-szakaszra végzett helyszíni sebességmérések alapján a vízmélység és a függélysebesség között az alábbi empirikus kapcsolatot állapítottuk meg:

$$v = 0,2078 \cdot H^{0,985},$$

ahol H — vízmélység [m]

v — a függélyközépsébség [m/s]

A fenti összefüggést alkalmazva, meghatároztuk az adott tervezési vízszinthez a keresztshelvény vízhozamösszegző vonalát. A vízhozamösszegző vonal maximális ordinátáját 20 részre osztva, majd ezt a vízhozamösszegző vonalra visszavetítve, megkaptuk grafikus úton az x_i egyenvízhozamú sáv szélességeket. Ezt a szerkesztési menetet mutatja be a 4. ábra egy kiválasztott Duna keresztshelvényben. Az eljárás természetesen elég sok bizonytalanságot tartalmaz, ami a függélyközépsébség és a vízmélység közötti meglehetősen durva összefüggésből és a grafikus szerkesztésből is adódik. (Megjegyezzük, hogy a vízhozamösszegző vonal maximális ordinátája pozitív és negatív irányban is eltért az adott méretezési vízálláshoz — mérésből, vízhozamgörbéből — meghatározható vízhozamtól. De feltételeztük, hogy ez az egyenvízhozamú sávok egyenletes kiosztását nem befolyásolja.)



4. ábra. Az egyenvízhozamú sávok meghatározása grafikus úton

Ilyen módon összesen 22 szelvényben határoztuk meg az egyenvízhozamú sávokat: az Óbudai sziget fölött 3, az Óbudai sziget mellett 2, az Óbudai sziget és a Margitsziget között 2, a Margitsziget mentén 3, a Margitsziget alatt 12 szelvényben. Az Óbudai sziget 1–19 arányban, míg a Margitsziget 9–11 arányban osztotta fel a teljes keresztiszelvényt. A számítás szempontjából éppen a szigetek jelentették a különlegességet, hiszen a szigetek, mint elválasztó falak jelentkeznek a bolyongási modellben; a sziget egyik oldaláról a sziget másik oldalára nem kerülhet át szennyezőanyag részecske. A szigeteket ugyanúgy visszaverő falakként modelleztük, mint a partokat és ez azt jelenti, hogy az átmenetvalószínűségi mátrixok szerkezete ezeken a szakaszokon speciális alakú.

Az első részben a p_i és q_i értékekre levezetett (1a, b, c) összefüggéseket alkalmaztuk, de a modellezés egyszerűbbé tétele érdekében egyes szakaszokat összevontan kezeltünk és így öt úgynevezett $f(p, q)$ mintafüggvényt, vagyis az elkeveredés keresztiszelvény menti alakulását leíró függvényt vettünk fel (1. táblázat). Az átmenetvalószínűségi mátrix p_i , q_i elemeit az alábbi formában számítottuk:

$$p_i = \frac{\beta \cdot \lambda}{1 + \beta} f_i(p, q) \quad \text{és} \quad q_i = \frac{\lambda}{1 + \beta} f_i(p, q)$$

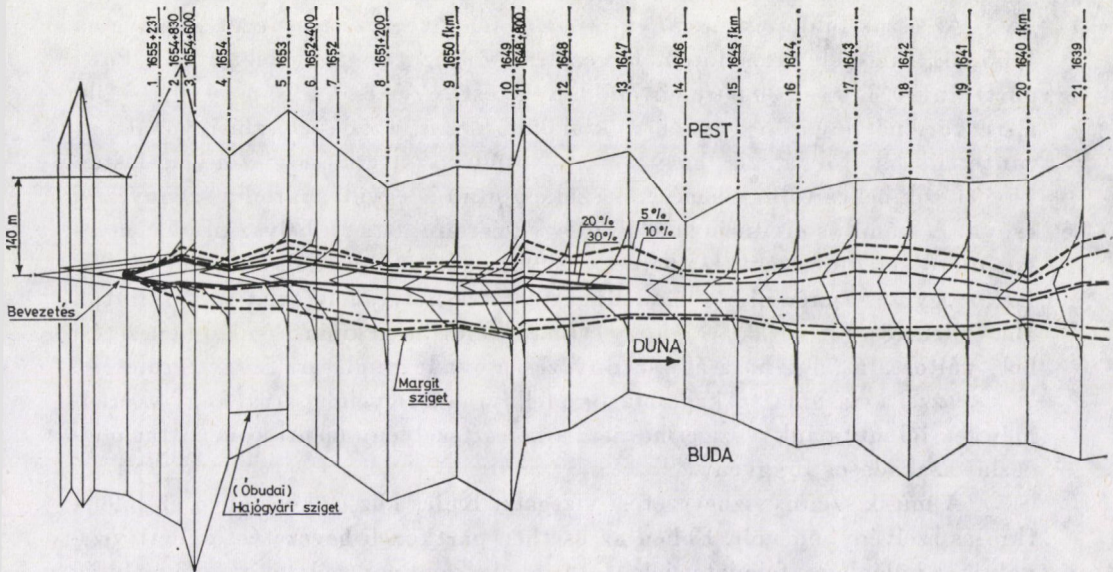
1. táblázat
 $A f_i(p, q)$ függvény értékei

i szelvény pontok	Óbudai- sziget fölött	Óbudai- sziget mellett	Óbudai-szi- get és Margitsziget között	Margitsziget mellett	Margitsziget alatt
1	0,6	0,20	0,60	0,60	0,60
2	0,85	0,40	0,80	0,75	0,85
3	0,95	0,70	0,95	0,80	0,95
4	1,00	0,85	1,00	0,85	1,00
5	1,00	0,95	1,00	0,95	1,00
6	0,97	1,00	0,97	0,85	0,87
7	0,95	1,00	0,95	0,80	0,95
8	0,90	0,97	0,90	0,75	0,90
9	0,85	0,95	0,85	0,60	0,85
10	0,85	0,85	0,85	0,60	0,85
11	0,85	0,85	0,85	0,75	0,85
12	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85
13	0,90	0,90	0,90	0,97	0,90
14	0,95	0,95	0,95	1,00	0,95
15	0,97	0,97	0,97	0,90	0,97
16	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
17	1,00	1,00	1,00	0,97	1,00
18	0,95	0,95	0,95	0,85	0,95
19	0,85	0,85	0,85	0,75	0,85
20	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60

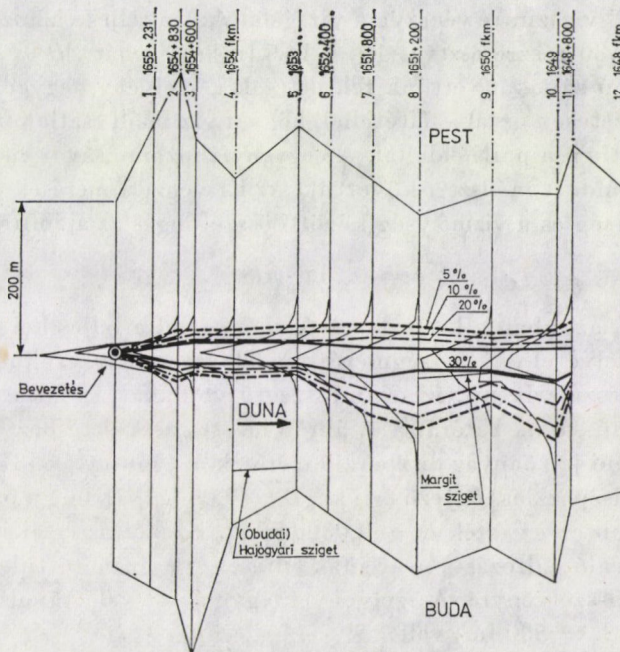
A λ és β értékei szelvényről szelvényre változtak (2. táblázat).

2. táblázat

Szel- vény- szám	λ	β	Hely
1	0,12	1,12	Óbudai-sziget fölött
2	0,08	1,10	
3	0,15	1,05	
4	0,20	1,02	Óbudai-sziget mentén
5	0,10	1,10	
6	0,20	1,10	Óbudai-sziget és a Margitsziget között
7	0,15	1,10	
8	0,25	1,0	Margitsziget mentén
9	0,25	0,95	
10	0,08	0,90	
11	0,22	0,90	Margitsziget alatt
12	0,27	0,90	
13	0,32	0,90	
14	0,37	0,85	
15	0,30	0,88	
16	0,27	0,90	
17	0,25	1,0	
18	0,22	1,0	
19	0,27	1,05	
20	0,27	1,10	
21	0,21	1,10	
22	0,20	1,10	



5. ábra. Szennyezőanyag koncentrációjának alakulása a parttól 140 m-re való bevezetés esetén (Észak-budapesti szennyvíztisztító telep)



6. ábra. Szennyezőanyag koncentrációjának alakulása a parttól 200 m-re való bevezetés esetén (Észak-budapesti szennyvíztisztító telep)

Az észak-budapesti szennyvíztisztító telep tervezett bevezetési helye az 1655,231 fkm-nél van. Három bevezetési változatot modelleztünk, a Pesti parttól: 110, 140 és 200 m-re történő bevezetést. Az 5. és 6. ábrán a 140 és a 200 m-re történő bevezetés esetében kialakuló szennyeződés-eloszlási vonalakat tüntettük fel. Jól látszik, hogy a szennyeződés szétterülése viszonylag lassan következik be, és több kilométeres szakasz után is együtt marad a szennyezési csóva. A számítás eredményei elég jó egyezést mutattak a helyszíni jelzőanyag mérési eredményekkel, amelyet a 200 m-es bevezetési helyen végeztek [2]. Ez az egyezés a modell és a modellparaméterek helyes felvételét támasztották alá, és lehetőséget adtak arra, hogy csupán számítással kimutassuk a bevezetési hely változtatásának hatását a szennyezési csóva levonulására és szétterülésére.

Ezzel a vizsgálattal kapcsolatban felhívjuk a figyelmet arra, hogy az eredmények jól mutatják a sziget hatást; a keresztiszelvény menti koncentráció eloszlás szakadós függvény.

A másik szennyvízbevezetési vizsgálat Kulcs község közelében az 1596,1 fkm-es szelvényben volt. Ebben az esetben partközeli bevezetést kellett vizsgálni, ez különleges feladatot jelentett abból a szempontból, hogy a vízmélység és a diszperziós tényező is erősen változik a partmenti sávban, a partmenti pangó vizes területeken pedig a szennyezőanyag visszamarad és az elkeveredés lassú. Ezért csak a partmenti sávot modelleztük, hogy így mintegy kinagyítva ezt a részt, az elkeveredési folyamatokról pontosabb képet alkothassunk.

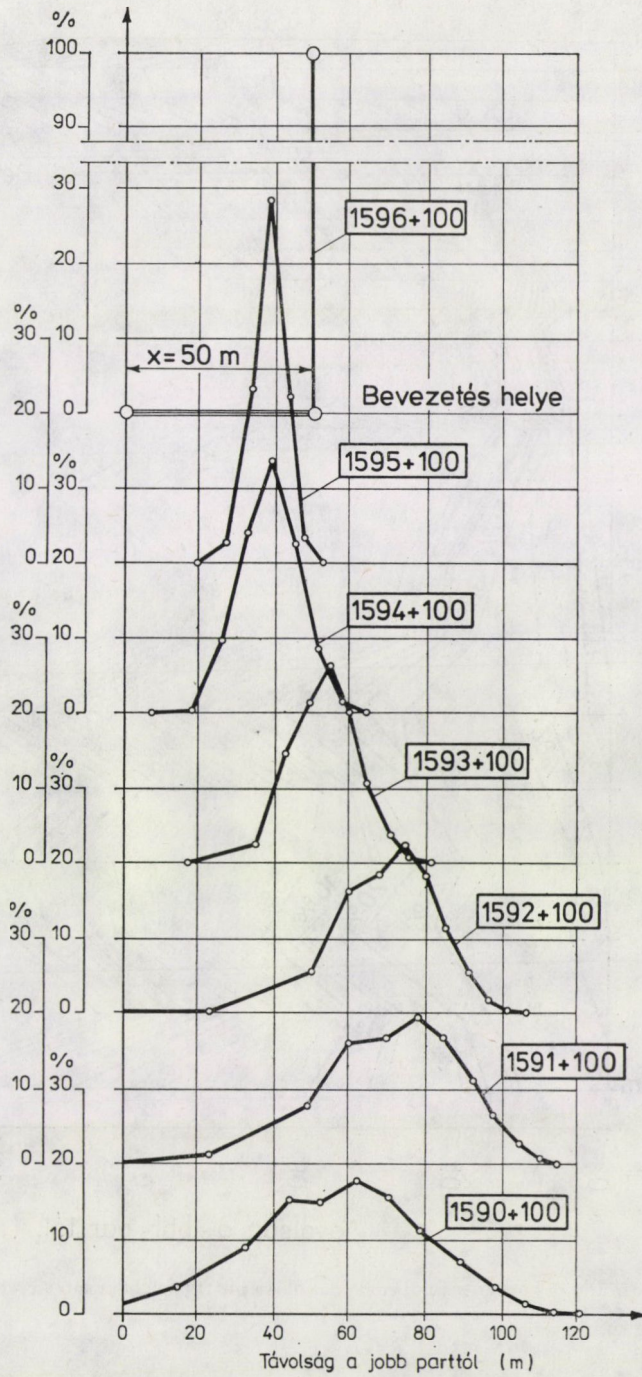
A DB, „O” vízszintre végezve a vizsgálatokat a teljes vízhozam $Q = 1160$ [m³/s] volt ezt 80 részre osztva $\Delta Q = 14,5$ [m³/s]. Tehát $\Delta Q = 14,5$ [m³/s]-es egyenvízhozamú sávokat vettünk fel, de csak a szelvény negyedrészt modelleztük, természetesen azzal a feltétellel, hogy a víz felőli csatlakozásnál elnyelő fal van ellentétben a parti oldallal. Az egyenvízhozamú sávok meghatározásakor a már elmondott módszert követtük. Az itt végzett mérések alapján a függélyközépsébség és a vízmélység közötti összefüggés az alábbi volt:

$$v = 0,212 \cdot H^{0,978}.$$

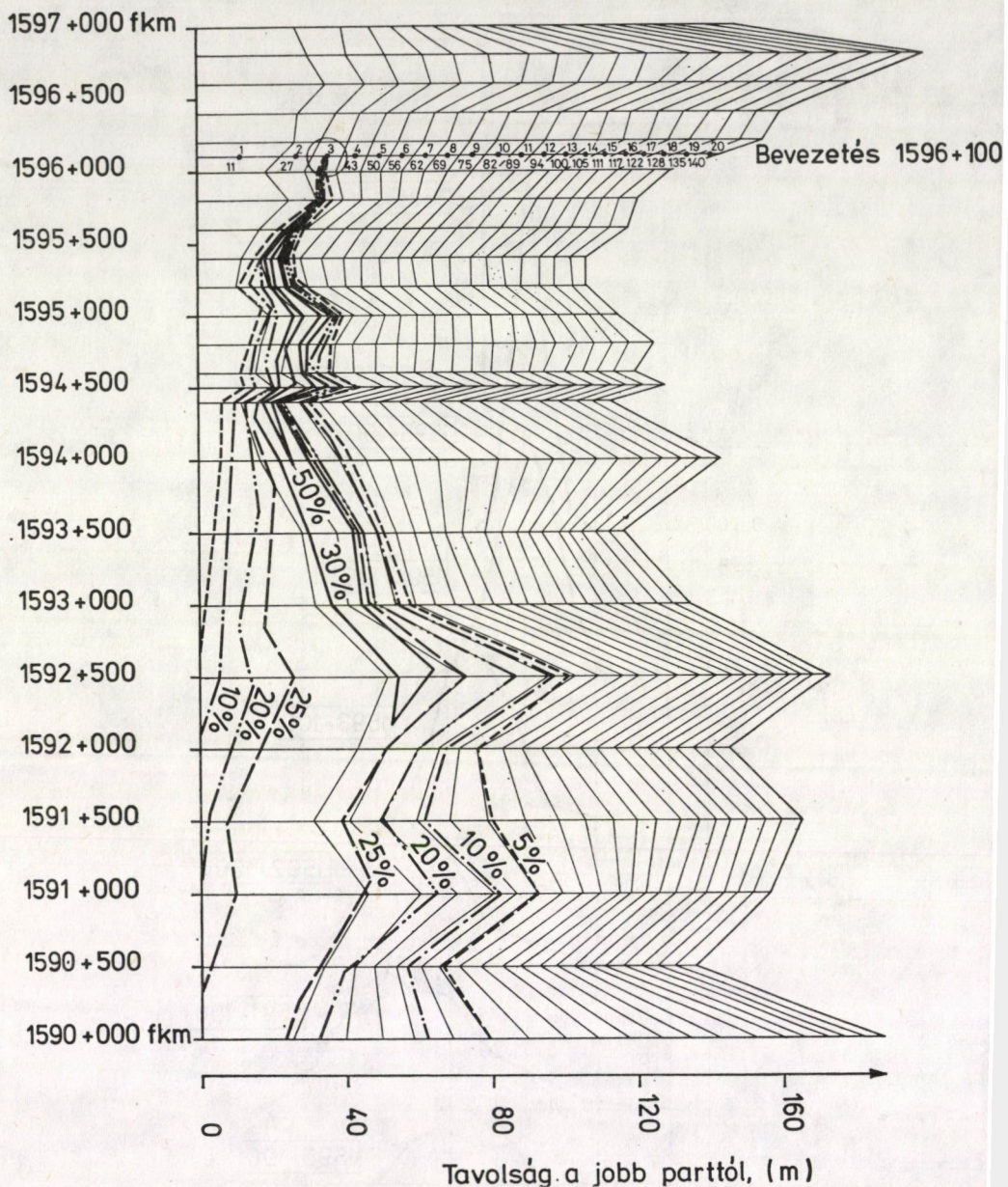
Természetesen, azonban a keresztiszelvényben, ahol a teljes keresztiszelvényre terjedő mederfelvétel és sebességmérés rendelkezésre állt, ezekből szerkesztettük meg a keresztiszelvény vízhozamösszegző vonlatát, és határoztuk meg az egyenvízhozamú sávok határát a 4. ábrán látott szerkesztéshez hasonlóan.

A helyszíni jelzőanyag diszperzió mérések azt mutatták [3], hogy a parttól 30 m-re a diszperziós tényező értéke, $D = 0,03$ [m²/s], míg a parttól 50 m-re és annál beljebb ez az érték $D = 0,036$ [m²/s]. Ezeket az értékeket elfogadva és a közöttük való változást lineárisnak feltételezve, számítottuk a p_i és q_i értéket szelvényről-szelvényre. A szelvények egymástól való távolsága ebben az esetben végig, $L = 500$ [m] volt.

A szennyezőanyag számítógépes vizsgálatát a Duna 1596 + 100 és 1590 + 100 fkm közötti szakaszára végeztük el. A lehetséges bevezetési pon-



7. ábra. Szennyezőanyag koncentrációjának keresztaszvénny menti alakulása part közeli bevezetés esetében ($X = 50$ m)



8. ábra. Szennyezőanyag koncentrációjának alakulása partközeli bevezetés esetében ($X = 35$ m)

tokat felvéve (11 [m], 27 [m], 35 [m], 43 [m], 50 [m], 56 [m], 62 [m], 69 [m], 72 [m] a jobb parttól) meghatároztuk a szennyezőanyag koncentráció kereszt-szelvény és hosszszelvény szerinti alakulását. A 7. és 8. ábrán mutattunk be a feldolgozások közül kettőt. Az egyik ábrán a szennyezőanyag kereszt-szelvény menti eloszlását látjuk, míg a másikon az azonos koncentrációjú vonalakat rajzoltuk meg a Duna helyszínrajzán. A szennyvízbevezetés műszaki részleteivel és értékelésével itt nem foglalkozunk.

Az ábrákon látható, hogy a part közelében az elkeveredés sokkal lassúbb a szennyezőanyag a partmenti sávba szorul. Ezek az eredmények jó egyezésben vannak a valóságban tapasztalható folyamatokkal, ami a sztochasztikus bo-lyongási elméleten alapuló elkeveredési számítások helyességét támasztja alá.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok Dr. SZOLNOKY Csabának, aki az elkeveredési probléma felvetésével és a munkákba való bevonásával ösztönzött a sztochasztikus elkeveredési modell kidolgozá-sára. A számítás gépi programját HUZELLA Gábor, az egyéb előkészítő számításokat BOKOR Barna egyetemi hallgatók készítették.

IRODALOM

1. KONTUR I.: Sztochasztikus keveredési modell a Paks alatti Duna-szakaszra. *Műszaki Tudo-mány* (1978)
2. Észak-budapesti Dunai szennyvízbevezetések elkeveredési-vízminőségi vizsgálata. *Kutatási jelentés* BME, Vízgazdálkodási és Vízépítési Intézet (1978). Témavezető: SZOLNOKY Csaba
3. A Szabadegyházi Kukoricacukor és Szeszgyár szennyvízeinek dunai bevezetése. *Kutatási jelentés*. BME, Vízgazdálkodási és Vízépítési Intézet. 1980. Témavezető: SZOLNOKY Csaba
4. SZOLNOKY Cs.—ANIOT P.—BUZÁS K.—KONTUR I.: Az Észak-budapesti Duna-szakasz ter-helhetősége környezetvédelmi szempontból. II. Magyar Hidrológiai Társaság Országos Vándorgyűlése, Keszthely 1979
5. KONTUR I.—AMBRUS S.: Random Walk Model Applied in Water Resources Management. Enviromental Systems Analysis and Management, *IFIP WG7.1 Working Conference, Rome Italy, 28–30 September, 1981. Proceedings* Ed. S. RINALDI North–Holland Publishing Company, Amsterdam 1982.

Investigations on Pollution-Mixing in the Danube. — Research investigations have been carried out for several years by the Institute of Water Management and Hydraulic Engineering, Technical University of Budapest relating to the mixing of pollutions discharged into the Danube. To the transverse and longitudinal mixing and to the spreading of the impu-rities in the river, a model of the random rambling of the flow has been constructed. In this paper the extension of ideas of the theory of probability has been continued to develop: the effect of the transverse change of the coefficient of dispersion, the changes of the cross currents and water depth have been analysed. Two methods of the special application of the random walk model are presented: the first one is the case where also holms are to be found in the river, and the second where the discharge of the impurities originated from the coastal zone takes place. The calculations treating the process of mixing are carried out for two dimensions and using vertical integral mean which, in case of large rivers, as is the case on the Hungarian stretch of the Danube, is a permissible approximation.

Schmutzstoffvermischungsuntersuchungen im Donauwasser. — Durch die Forschungsanstalt für Wasserwirtschaft und Wasserbau der Budapester Technischen Universität werden über die Vermischung der in die Donau geleiteten Verunreinigungen seit mehreren Jahren Untersuchungen durchgeführt. Für die Quer- und Längsvermischung und Verbreitung der Schmutzstoffe wurde ein Modell zufälliger Strömung angewandt. In der vorliegenden Abhandlung wird die Verbreitung des Wahrscheinlichkeitsgedankens fortgesetzt: es wird der Effekt der Änderung des Dispersionskoeffizienten in Querrichtung sowie der Änderung der Querströmungen und der Wassertiefe untersucht. Zwei spezielle Anwendungen des Modells der zufälligen Strömung werden dargestellt: die erste gilt für den Fall, wo sich in dem Strom auch Inseln befinden, und die zweite für den Umstand, wo es sich um die Zuleitung von Schmutzstoffen in Ufernähe handelt. Der Vermischungsverlauf wird durch die Berechnungen in zwei Dimensionen untersucht: es werden senkrechte Integraldurchschnittswerte angewandt, was im Fall von sehr breiten Strömen wie der ungarische Abschnitt der Donau, eine zulässige Näherung darstellt.

KIEGÉSZÍTÉSEK A KÖRÍV KÖZÉPVONALÚ RUDAK CSAVARÁSI FELADATÁVAL KAPCSOLATBAN

ECSEDI ISTVÁN*

[Beérkezett: 1981. április 24-én]

E tanulmány állandó keresztmetszetű körív középvonalú rugalmas anyagú rudak úgynevezett „egyenletes” csavarási feladatával foglalkozik. A tanulmány eredményei többszörösen összefüggő keresztmetszetű rudakkal kapcsolatosak. A körív középvonalú rúd csavarási merevségére vonatkozó alsó és felső korlátok bizonyításai döntően a Schwarz-féle egyenlőtlenség alkalmazásán alapulnak.

1. Bevezetés, előzmények

E tanulmány állandó keresztmetszetű körív középvonalú rugalmas anyagú rudakkal foglalkozik.

A rúd keresztmetszete a $(p + 1)$ -szeresen összefüggő síkbeli T tartomány. A rúd végső A és B keresztmetszeteit $F_A = Fe_z$ és $F_B = -Fe_z$ erők terhelik. Az F_A és F_B erő hatásvonala a z tengely (1. ábra).

A rúd bármelyik keresztmetszetének igénybevétele a keresztmetszet síkjába eső olyan erő, amelynek hatásvonala a z tengely és nagysága F .

A vonatkozó irodalom a fentiekben vázolt feladatot a körív középvonalú rúd úgynevezett „uniform torsion” egyenletes csavarási feladatának nevezi.

Az egyszerűen összefüggő keresztmetszetű körív középvonalú rúd azon feladatával mikor is az egyes keresztmetszetek igénybevétele olyan erő, amelynek hatásvonala a z tengely, számos tanulmány foglalkozott.

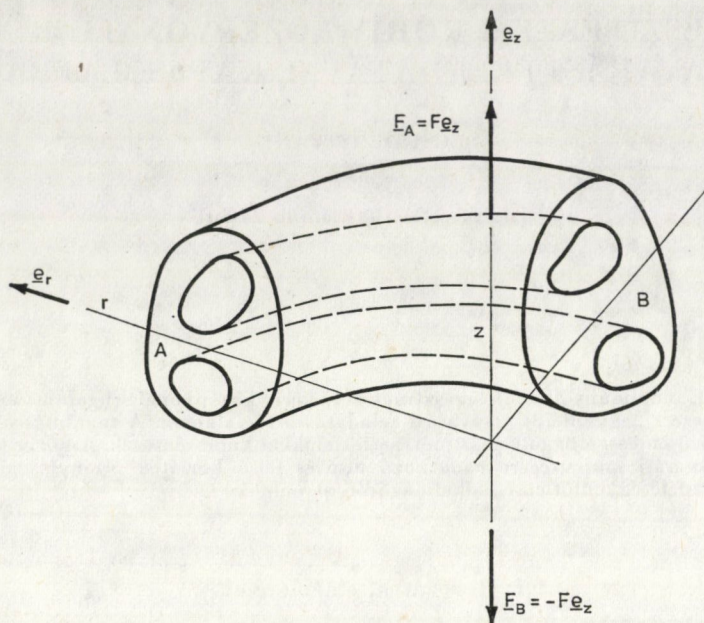
Körív középvonalú rúd egyenletes csavarási feladatának megoldására feszültségfüggvényt I. H. MICHELL alkalmazott elsőnek [1]. Ő téglalap keresztmetszetet vizsgált.

O. GÖHNER a fenti problémát a fokozatos közelítés módszerének alkalmazásával oldotta meg, tömör kör-keresztmetszet esetében [2]. Ez a megoldás megtalálható S. P. TIMOSHENKO és I. N. GOODIER könyvében is [6].

Az O. GÖHNER által kidolgozott fokozatos közelítő eljárást téglalap alakú keresztmetszetre G. LIESECKE alkalmazta [3].

Kör keresztmetszetű körív középvonalú rúd „egyenletes” csavarási feladatának zárt alakú megoldását W. FREIBERGER adta meg [7].

* Dr. Ecsedi István, 3531 Miskolc, Vászonfehérítő út 24. IV/1.



1. ábra. Körív középvonalú, állandó keresztmetszetű rúd

A problémakörrel kapcsolatban kiemelkedő H. L. LANGHAAR [8] tanulmánya. Ő a kiegészítő energia funkcionállal kapcsolatos minimum tétel alkalmazásával oldotta meg az egyszerűen összefüggő keresztmetszetű körív középvonalú rúd „egyenletes” csavarási feladatát. Tanulmánya az általános esetre levezetett összefüggések alkalmazását téglalap keresztmetszeten szemlélteti.

Négyszög keresztmetszetre vonatkozó analitikus megoldásokat találunk F. TRICONNI [4] és I. STEIN [13] tanulmányaiban.

H. L. LANGHAAR eredményét homogén, de anizotrop anyagra P. P. CHATAJI [9] általánosította.

Anizotrop heterogén anyagú kör keresztmetszetű körív középvonalú rúd csavarási problémájával kapcsolatban kiemelkedőek még Sz. G. LEHNICKIJ eredményei ([14], [15]). Tanulmányai a vonatkozó mezőegyenletek levezetését is ismertetik általános alakú egyszerűen összefüggő keresztmetszetekre.

A problémakörrel kapcsolatban főleg a szilárdságtani alkalmazások tekintetében említésre méltóak még a ([5], [16], [17]) tanulmányok.

Kör keresztmetszetű körív középvonalú rúd egyenletes csavarási problémájával kapcsolatban is igen értékes megjegyzéseket tartalmaznak I. N. GOODIER és G. I. ANCKER tanulmányai ([10], [11], [12]).

A [18], [19] tanulmányok a körív középvonalú rúd feszültség állapotát leíró feszültség függvény előállítására a variációszámítás különböző direkt módszereit alkalmazzák.

A jelen tanulmány elsődleges célja a homogén, izotrop anyagú, többszörösen összefüggő keresztmetszetű, körív középvonalú rúd egyenletes csavarási problémájával kapcsolatos matematikai kerületérték feladat felállítás.

A tanulmány új fogalmat is értelmez, amelyet körív középvonalú rúd csavarási merevségének nevez. A csavarási merevséggel kapcsolatban olyan egyenlőtlenségi relációk nyernek bizonyítást, amelyek alapján alsó és felső korlátok képezhetők a csavarási merevség számértékére.

Új eredmények — a szerző véleménye szerint — elsősorban a többszörösen összefüggő keresztmetszetekre vonatkozó általánosítások és a csavarási merevségre adott korlátok.

2. Fontosabb jelölések

r, φ, z hengerkoordináták,
 e_r, e_φ, e_z egységvektorok,
 $T(p+1)$ -szeresen összefüggő síkbeli tartomány,
 $\partial T = \partial T_0 + \partial T_1 + \dots + \partial T_p$ a T tartomány határgörbéje,
 ∂T_i ($i = 0, 1, 2, \dots, p$) Egyszerű, különálló zárt görbék,
 T_i a ∂T_i zárt görbe által határolt korlátos síkbeli tartomány
 s a ∂T görbén mért ívkoordináta,
 $t = t_r e_r + t_z e_z$ a ∂T görbe érintő egységvektora,
 $n = n_r e_r + n_z e_z$ a ∂T görbe normális egységvektora,
 $R = r e_r + z e_z$ helyvektor,
 $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} e_r + \frac{\partial}{\partial z} e_z$ Hamilton-féle differenciál-operátor,

„ \cdot ” két vektor skaláris szorzatának jele,
 „ \times ” két vektor vektoriális szorzatának jele,
 $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ derék feszültségek,
 $\tau_{r\varphi}, \tau_{z\varphi}, \tau_{rz}$ csúsztató feszültségek,
 $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z$ fajlagos nyúlások,
 $\gamma_{r\varphi}, \gamma_{\varphi z}, \gamma_{rz}$ fajlagos szögváltozások
 u, v, w elmozdulások,
 F erő
 $U = U(r, z)$ feszültségfüggvény,
 C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) az $U = U(r, z)$ feszültségfüggvénnyel kapcsolatos állandók,
 K kiegészítő energia,
 K módosított kiegészítő energia,
 λ Lagrange-féle multiplikátor,
 $\psi = \psi(r, z)$ segédfüggvény,
 $V = V(r, z)$ segédfüggvény,
 D_i ($i = 1, 2, \dots, n$) a $V = V(r, z)$ függvénnyel kapcsolatos állandók,
 S „csavarási” merevség,
 $H = H(r, z)$ segédfüggvény,
 L_i ($i = 1, 2, \dots, p$) a $H = H(r, z)$ függvénnyel kapcsolatos állandók,
 $c = c(r, z)$ segédfüggvény,
 $b = b_r(r, z)e_r + b_z(r, z)e_z$ síkbeli vektormező.
 Az egyéb mennyiségeket, változókat a szöveg értelmezi.

3. Mechanikai alapok

A rugalmasságtani problémával kapcsolatos egyenletek realizálására jelen esetben az r, φ, z hengerkoordinátarendszert használjuk.

A vonatkozó szakirodalom akár a rugalmas anyagú, akár a képlékeny anyagú körív középvonalú, állandó keresztmetszetű rúd egyenletes csavarási

problémáját vizsgálja, a rúd feszültség állapotával kapcsolatban, az alábbi előzetes feltevéseket használja:

- a) a feszültségállapot független a φ poláris szögtől,
- b) a rúd minden pontjában a derék feszültségek és a τ_{rz} csúsztató feszültség zérus, azaz

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = \tau_{rz} = 0.$$

Az a) feltételből kifolyólag

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi}(r, z), \tau_{z\varphi} = \tau_{z\varphi}(r, z)$$

E tanulmány a többszörösen összefüggő keresztmetszetű körív középvonalú rúd egyenletes csavarási feladatának azon megoldását adja meg, amikor is a rúd feszültségállapota a fentiekben említett a) és b) feltételt kielégíti.

A jelen feladatban a mechanikai egyensúly szükséges feltételei a következő egyenletekre vezetnek ([14], [15]):

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z}(r^2 \tau_{z\varphi}) = 0 \quad (r, z) \in T, \quad (3.1)$$

$$\tau_{r\varphi} n_r + \tau_{z\varphi} n_z = 0 \quad (r, z) \in \partial T, \quad (3.2)$$

$$\int_T \tau_{r\varphi} dT = 0, \quad (3.3)$$

$$\int_T \tau_{z\varphi} dT = F, \quad (3.4)$$

$$\int_T (z \tau_{r\varphi} - r \tau_{z\varphi}) dT = 0. \quad (3.5)$$

Jelölje

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

a Hamilton-féle differenciáloperátort,

„., a két vektor skaláris szorzatát,

$\mathbf{n} = n_r \mathbf{e}_r + n_z \mathbf{e}_z$ a ∂T határgörbe normális egységvektorát, s a ∂T görbén mért ívkoordinátát (2. ábra).

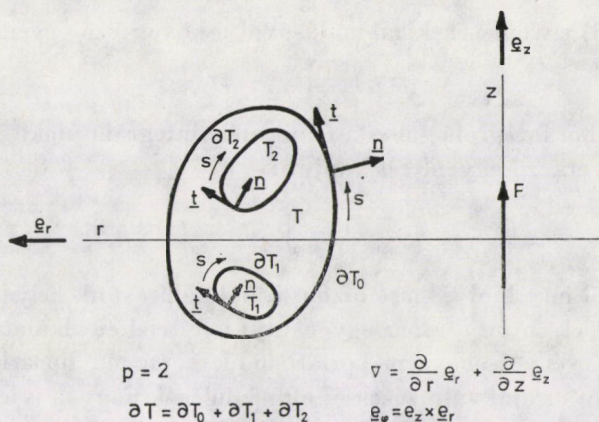
A (3.1) és a (3.2) egyenletek a

$$\boldsymbol{\tau}_\varphi = \tau_{r\varphi} \mathbf{e}_r + \tau_{z\varphi} \mathbf{e}_z \quad (3.6)$$

vektor segítségével a következő módon is felírhatók:

$$\nabla \cdot (r^2 \boldsymbol{\tau}_\varphi) = 0 \quad \mathbf{R} \in T, \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\tau}_\varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{R} \in \partial T. \quad (3.8)$$



2. ábra. Többszörösen összefüggő keresztmetszet

Következőkben bebizonyítjuk, hogy a (3.7) statikai egyensúlyi egyenletet és a (3.8) statikai peremfeltételt egyaránt kielégítő, a keresztmetszet síkján megoszló $\tau_\varphi = \tau_\varphi(\mathbf{R})$ csúsztató feszültségek statikailag egyenértékűek egy olyan erővel, amelynek hatásvonalja a z tengely és nagysága F .

A

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r} r^2 \tau_\varphi \right) = \frac{1}{r} \nabla \cdot (r^2 \tau_\varphi) - \tau_{r\varphi} = -\tau_{r\varphi} \quad (3.9)$$

azonosságból integrálással és a Gauss-féle integrálatalakítási szabály alkalmazásával az alábbi egyenletet tudjuk levezetni:

$$\int_T \tau_{r\varphi} dT = - \int_{\partial T} r \tau_\varphi \cdot \mathbf{n} ds = 0. \quad (3.10)$$

Ez utóbbi egyenletből az következik, hogy a csúsztató feszültségek eredője csak függőleges hatásvonallú lehet.

Annak bizonyításához, hogy a csúsztató feszültségek eredőjének hatásvonalja a z tengely, a következő egyenletre van szükségünk, amely a (3.7) egyensúlyi egyenlet közvetlen következménye:

$$2r \tau_{r\varphi} + r^2 \nabla \cdot \tau_\varphi = 0. \quad (3.11)$$

A (3.11) egyenletből elemi átalakítással nyerjük az alábbi egyenletet:

$$2z \tau_{r\varphi} + rz \nabla \cdot \tau_\varphi = 0. \quad (3.12)$$

Másrészt viszont

$$\nabla \cdot (rz \tau_\varphi) = z \tau_{r\varphi} + r \tau_{z\varphi} + rz \nabla \cdot \tau_\varphi. \quad (3.13)$$

A (3.12) és (3.13) egyenletek kombinálásával a következő egyenlethez jutunk

$$\nabla \cdot (rz\tau_\varphi) = r\tau_{z\varphi} - z\tau_{r\varphi}. \quad (3.14)$$

A fenti egyenletből integrálással és a Gauss-féle integrálatalakítási tétel alkalmazásával a következő egyenletet kapjuk:

$$\int_T (r\tau_{z\varphi} - z\tau_{r\varphi}) dT = \int_{\partial T} n \cdot \tau_\varphi rz ds = 0. \quad (3.15)$$

Ezen egyenletből már kiolvasható bizonyítandó állításunk helyessége.

Mivel a levezetések során csak az egyensúlyi feltételeket alkalmaztuk a bizonyított állítás érvényessége nem korlátozódik homogén lineárisan rugalmas anyagú rúdra, sőt az alakváltozások és elmozdulások nagyok is lehetnek.

4. A feszültségfüggvényre vonatkozó feladat

A (3.1) mechanikai egyensúlyi egyenlet általános megoldását az alábbi képlettel állíthatjuk elő ([14], [15]):

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (4.1)$$

$$\tau_{z\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (4.2)$$

ahol $U = U(r, z)$ valamely legalább kétszer folytonosan differenciálható egyébként tetszőleges kétváltozós függvényt jelöl.

A (3.2) mechanikai peremfeltétel kielégítése az alábbi egyenletre vezet:

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi} n_r + \tau_{z\varphi} n_z &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial z} \left(-\frac{dz}{ds} \right) + \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{dr}{ds} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \quad \mathbf{R} \in \partial T. \end{aligned} \quad (4.3)$$

A fenti egyenlet levezetésénél felhasználtuk, hogy

$$\mathbf{n} = n_r \mathbf{e}_r + n_z \mathbf{e}_z = -\frac{dz}{ds} \mathbf{e}_r + \frac{dr}{ds} \mathbf{e}_z. \quad (4.4)$$

A (4.3) peremfeltétel akkor van kielégítve, ha $U = U(r, z)$ a $\partial T_0, \partial T_1, \dots, \partial T_p$ peremgörbéken állandó értékű:

$$U = C_0 \quad \mathbf{R} \in \partial T_0, \quad (4.5)$$

$$U = C_i \quad \mathbf{R} \in \partial T_i, \quad (4.6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, p).$$

Mivel U -ból és $(U + C)$ -ből (C tetszőleges valós állandó) származtatott feszültségállapotok megegyeznek, a C_0 állandót választhatjuk zérusnak is. A következőkben a C_0 állandót minden esetben zérusnak tekintjük.

A keresztmetszet igénybevétele, az F erő az $U = U(r, z)$ feszültségfüggvénnyel az alábbi módon fejezhető ki:

$$\begin{aligned} F &= \int_T \tau_{z\varphi} dT = \int_T \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial r} dT = \int_T \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r^2} \right) dT + 2 \int_T \frac{U}{r^3} dT = \\ &= 2 \int_T \frac{U}{r^3} dT + \int_{\partial T} \frac{U}{r^2} n_r ds = 2 \int_T \frac{U}{r^3} dT + \\ &+ \sum_{i=1}^p C_i \int_{\partial T_i} \frac{n_r}{r^2} ds. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A (4.7) képlet még tovább alakítható a Gauss-féle integrálatalakítási szabály alkalmazásával, hiszen

$$\begin{aligned} \int_{\partial T_i} \frac{n_r}{r^2} ds &= 2 \int_{T_i} \frac{dT}{r^3}, \\ (i &= 1, 2, \dots, p). \end{aligned} \quad (4.8)$$

A fenti képletekben az integrálás a ∂T_i ($i = 1, 2, \dots, p$) görbéken az óramutató járásával megegyező értelemben történik.

A (4.7) és (4.8) képlet kombinálásával az alábbi képletet kapjuk:

$$F = 2 \int_T \frac{U}{r^3} dT + 2 \sum_{i=1}^p C_i \int_{T_i} \frac{dT}{r^3}. \quad (4.9)$$

A feszültségfüggvényt meghatározó kerületérték-feladat felállításához az alakváltozási energia minimum tételét használjuk. A rúd azon darabjának alakváltozási energiája, amely egymással egységnyi szöget bezáró meridiánsíkok közé esik:

$$K = \frac{1}{2G} \int_T r (\tau_{r\varphi}^2 + \tau_{z\varphi}^2) dT. \quad (4.10)$$

A (3.1), (3.2), (3.4) egyensúlyi feltételeket kielégítő feszültség állapotokat tekintve a (4.10) kifejezés az alakváltozási energia minimum elve szerint a *kompatibilitási* feltételeket kielégítő $\tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi}(r, z)$, $\tau_{z\varphi} = \tau_{z\varphi}(r, z)$ feszültségeknél minimális értékű.

A (4.10) alakváltozási energia a (4.5), (4.6) peremfeltételeket kielégítő $U = U(r, z)$ feszültségfüggvénnyel az alábbi alakban adható meg:

$$K = \frac{1}{2G} \int_T \frac{1}{r^3} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] dT = \frac{1}{2G} \int_T \frac{1}{r^3} |\nabla U|^2 dT. \quad (4.11)$$

A feszültségfüggvénnyel kapcsolatos kompatibilitási feltételeket a (4.11) funkcionál stacionaritási feltétele szolgáltatja. A (4.11) funkcionál értelmezési tartományát a $T + \partial T$ zárt tartományban legalább egyszer, a T tartományban pedig legalább kétszer folytonosan differenciálható, az

$$U = 0 \quad \mathbf{R} \in \partial T_0, \quad (4.12)$$

$$U = C_i \quad \mathbf{R} \in \partial T_i, \quad (4.13)$$

$$(i = 1, 2, \dots, p)$$

peremfeltételeket és az

$$F = 2 \left(\int_T \frac{U}{r^3} dT + \sum_{i=1}^p C_i \int_{T_i} \frac{dT}{r^3} \right) \quad (4.14)$$

mellékfeltételt kielégítő kétváltozós $U = U(r, z)$ függvényt alkotják.

A (4.11) funkcionál stacionaritási feltételének levezetéséhez — tekintettel a (4.14) mellékfeltételre — a Lagrange-féle multiplikátor-módszert alkalmaztuk. A mellékfeltétellel módosított funkcionál

$$\bar{K} = \frac{1}{2G} \int_T \frac{1}{r^3} |\nabla U|^2 dT - 2\lambda \left(\int_T \frac{U}{r^3} dT + \sum_{i=1}^p C_i \int_{T_i} \frac{dT}{r^3} \right). \quad (4.15)$$

A fenti kifejezésben λ az úgynevezett Lagrange-féle multiplikátor.

A $\delta \bar{K} = 0$ egyenlet részletes kifejtésével az alábbi eredményt nyerjük:

$$\begin{aligned} \delta \bar{K} &= \frac{1}{G} \int_T \frac{1}{r^3} \nabla U \cdot \nabla \delta U dT - 2\lambda \int_T \frac{\partial U}{r^3} dT - \\ &- 2\lambda \sum_{k=1}^p \partial C_k \int_{T_k} \frac{dT}{r^3} = \frac{1}{G} \int_T \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \nabla U \delta U \right) dT - \\ &- \int \left\{ \frac{1}{G} \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \nabla U \right) + \frac{2\lambda}{r^3} \right\} \delta U dT - 2\lambda \sum_{k=1}^p \partial C_k \int_{T_k} \frac{dT}{r^3} = \quad (4.16) \\ &= - \int_T \left\{ \frac{1}{G} \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \nabla U \right) + \frac{2\lambda}{r^3} \right\} \delta U dT + \\ &+ \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{G} \int_{\partial T_k} \frac{1}{r^3} \frac{\partial U}{\partial n} ds - 2\lambda \int_{T_k} \frac{dT}{r^3} \right) \partial C_k = 0. \end{aligned}$$

A (4.16) egyenletből a variációszámítás szabályainak az alkalmazásával az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \nabla U \right) + \frac{2\lambda G}{r^3} = 0 \quad \mathbf{R} \in T, \quad (4.17)$$

$$\int_{\partial T_i} \frac{1}{r^3} \frac{\partial U}{\partial n} ds = 2\lambda G \int_{T_i} \frac{dT}{r^3}, \quad (4.18)$$

$$(i = 1, 2, \dots, p).$$

Az eddigi eredményeinket az alábbiakban tudjuk összegezni:

Körív középvonalú többszörösen összefüggő keresztmetszetű homogén izotrop lineárisan rugalmas anyagú rúd egyenletes csavarási feladata az alábbi kerületérték-feladatra vezet:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \nabla U \right) + \frac{2\lambda G}{r^3} = 0 \quad \mathbf{R} \in T, \quad (4.19)$$

$$U = 0 \quad \mathbf{R} \in \partial T_0, \quad (4.20)$$

$$U = C_i \quad \mathbf{R} \in \partial T_i, \quad (4.21)$$

$$\int_{\partial T_i} \frac{1}{r^3} \frac{\partial U}{\partial n} ds = 2\lambda G \int_{T_i} \frac{dT}{r^3}, \quad (4.22)$$

$$(i = 1, 2, \dots, p).$$

A (4.19) és a (4.22) egyenletekben szereplő λ multiplikátort a (4.14) egyenlet alapján tudjuk meghatározni.

5. A λ multiplikátor mechanikai jelentése

A $\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = \tau_{rz} = 0$, valamint a (4.1), (4.2) egyenletekből az általános Hooke törvény és a geometriai egyenletek alkalmazásával a következő összefüggések adódnak:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} = 0, \quad (5.1), (5.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad (5.3), (5.4)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} = \gamma_{r\varphi}(r, z), \quad (5.5)$$

$$\gamma_{z\varphi} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \gamma_{z\varphi}(r, z). \quad (5.6)$$

A fenti egyenletekből következik, hogy az elmozdulás vektor u, v, w koordinátáit az alábbi alakban tudjuk megadni ([7], [20]):

$$u = 0, \quad (5.7)$$

$$v = v(r, z), \quad (5.8)$$

$$w = k\varphi \quad (k = \text{állandó}). \quad (5.9)$$

A $v = v(r, z)$ függvényt $v(r, z) = r\psi(r, z)$ alakban írhatjuk. A

$$\gamma_{r\varphi} = r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{G} \tau_{r\varphi} = -\frac{1}{G} \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (5.10)$$

$$\gamma_{z\varphi} = r \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{k}{r} = \frac{1}{G} \tau_{z\varphi} = \frac{1}{G} \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial r} \quad (5.11)$$

egyenletekből a következő két egyenlet nyerhető:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{G} \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{G} \frac{1}{r^3} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{k}{r^2}. \quad (5.13)$$

Az elmozdulásmező egyértékűsége megköveteli, hogy a $\psi = \psi(r, z)$ függvény a T tartományban egyértékű legyen. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az (5.14) és (5.15) egyenletek fennálljanak:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \quad \mathbf{R} \in T, \quad (5.14)$$

$$\int_{\partial T_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz \right) = 0, \quad (5.15)$$

$$(i = 1, 2, \dots, p).$$

Az (5.12), (5.13), (5.14), (5.15) egyenletek kombinálásával a feszültségfüggvény-nyel kapcsolatos alábbi kompatibilitási egyenleteket kapjuk:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \nabla U \right) + \frac{2kG}{r^3} \varphi = 0 \quad \mathbf{R} \in T, \quad (5.16)$$

$$\int_{\partial T_i} \frac{1}{r^3} \frac{\partial U}{\partial n} ds = 2kG \int_{T_i} \frac{dT}{r^3}, \quad (5.17)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, p).$$

Az (5.17) formula levezetésénél a következő egyenletet alkalmaztuk:

$$-\int_{\partial T_i} \frac{k}{r^2} dz = \int_{\partial T_i} \frac{k}{r^2} n_r ds = -k \int_{T_i} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \right) dT = 2k \int_{T_i} \frac{dT}{r^3}, \quad (5.18)$$

$$(i = 1, 2, \dots, p).$$

A (4.19), (4.22) egyenleteknek az (5.16), (5.17) egyenletekkel való összevetéséből a

$$\lambda = k \quad (5.19)$$

egyenlet következik. Minthogy a k állandót az (5.9) képlettel vezettük be, annak mechanikai jelentése nyilvánvaló.

6. A csavarási merevség

Az (5.9) és az (5.19) egyenletből az következik, hogy két egymással egy-ségnyi szöget bezáró meridián síkban levő keresztmetszet egymáshoz viszonyított z tengely irányú elmozdulása k .

A lineáris mezőegyenletek és peremfeltételek következménye, hogy a k fajlagos elmozdulás és az erő F között

$$F = Sk \quad (6.1)$$

alakú összefüggés érvényes.

Az egyenletes csavarásnak kitett kör középvonalú rúd csavarási merevségét az

$$S = \frac{F}{k} \quad (6.1)$$

képlettel értelmezzük.

Legyen

$$U(r, z) = kGV(r, z). \quad (6.3)$$

A fenti $V = V(r, z)$ függvényre vonatkozó kerületérték-feladat a (4.19), (4.20) (4.21), (4.22), (5.19), (6.3) egyenletek kombinálásával nyerhető:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \nabla V \right) + \frac{2}{r^3} = 0 \quad \mathbf{R} \in T, \quad (6.4)$$

$$V = 0 \quad \mathbf{R} \in \partial T_0, \quad (6.5)$$

$$V = D_i \quad \mathbf{R} \in \partial T_i, \quad (6.6)$$

$$\int_{\partial T_i} \frac{1}{r^3} \frac{\partial V}{\partial n} ds = 2 \int_{T_i} \frac{dT}{r^3}, \quad (6.7)$$

$$(D_i = \text{állandó}),$$

$$(i = 1, 2, \dots, p).$$

A (6.4), (6.5), (6.6), (6.7) egyenletek által kijelölt kerületérték feladat megoldásának ismeretében a fontosabb mechanikai mennyiségeket az alábbi módon tudjuk megadni:

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{Gk}{r^2} \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \tau_{z\varphi} = \frac{Gk}{r^2} \frac{\partial V}{\partial r}, \quad (6.8), (6.9)$$

$$\tau_\varphi = \tau_{r\varphi} \mathbf{e}_r + \tau_{z\varphi} \mathbf{e}_z = -\frac{Gk}{r^2} \nabla V \times \mathbf{e}_\varphi, \quad (6.10)$$

$$F = Gk \left(2 \int_T \frac{V}{r^3} dT + 2 \sum_{i=1}^p D_i \int_{T_i} \frac{dT}{r^3} \right). \quad (6.11)$$

Ez utóbbi képletből kiolvasható, hogy

$$S = 2G \left(\int_T \frac{V}{r^3} dT + \sum_{i=1}^p D_i \int_{T_i} \frac{dT}{r^3} \right). \quad (6.12)$$

A következőkben kimutatjuk, hogy S nem lehet negatív.

A szorzat függvény deriválásával kapcsolatos Leibnitz tétel alkalmazásával azt írhatjuk, hogy

$$\nabla \cdot \left(V \frac{1}{r^3} \nabla V \right) = \frac{|\nabla V|^2}{r^3} + V \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \nabla V \right) = \frac{1}{r^3} \nabla V \cdot \nabla V - \frac{2V}{r^3}. \quad (6.13)$$

A (6.13) egyenletből integrálással és a Gauss-féle integrálatalakítási szabály alkalmazásával az alábbi egyenletet nyerjük:

$$\int_T \frac{1}{r^3} |\nabla V|^2 dT = 2 \int_T \frac{V}{r^3} dT + 2 \sum_{i=1}^p D_i \int_{T_i} \frac{dT}{r^3}. \quad (6.14)$$

Az utóbbi egyenletből a (6.12) formula felhasználásával kapjuk az igen értékes

$$S = G \int_T \frac{|\nabla V|^2}{r^3} dT \quad (6.15)$$

képletet. A (6.15) képletből kiolvasható, hogy S sohasem lehet negatív és csak akkor lehet S zérus, ha $V(\tilde{\mathbf{R}}) = 0 \in \mathbf{RT} + \partial T$.

7. Korlátok a csavarási merevségre

Kimutattuk, hogy az S csavarási merevség szigorú kiszámítására a (6.12) képlet szolgál. Ehhez azonban meg kell oldani szigorúan a (6.4)–(6.7) kerületértékfeladatot, ami általában igen fáradságos munkát igényel. Ezért lemondunk S szigorú értékének meghatározásáról és csupán arra törekszünk, hogy azt alsó és felső korlátok közé szorítsuk.

7.1. Alsó korlát. Fennáll az alábbi egyenlőtlenségi reláció

$$S \geq G \frac{\left(2 \int_T \frac{H}{r^3} dT + 2 \sum_{i=1}^p L_i \int_{T_i} \frac{dT}{r^3} \right)^2}{\int_T \frac{1}{r^3} |\nabla H|^2 dT}, \quad (7.1)$$

ahol $H = H(r, z)$ a $T + \partial T$ zárt tartományban folytonos, a T tartományban szakaszonként folytonosan differenciálható, a ∂T_0 görbén eltűnő, a ∂T_i ($i = 1, 2, \dots, p$) belső peremgörbéken állandó L_i értéket felvevő $-F(\mathbf{R}) = L_i \mathbf{R} \in \partial T_i$ — a $T + \partial T$ zárt tartományban nem azonosan zérus, egyébként tetszőleges kétváltozós függvényt jelöl.

Bizonyítás: a Schwarz-féle egyenlőtlenségi reláció alapján

$$\left(\int_T \frac{\nabla H \cdot \nabla V}{r^3} dT \right)^2 \leq \left(\int_T \frac{(\nabla H)^2}{r^3} dT \right) \left(\int_T \frac{|\nabla V|^2}{r^3} dT \right). \quad (7.2)$$

A (7.2) egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő integrált átalakítjuk:

$$\begin{aligned} \int_T \frac{\nabla H \cdot \nabla V}{r^3} dT &= \int_T \nabla \cdot \left(\frac{H \nabla V}{r^3} \right) dT - \\ &- \int_T H \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \nabla V \right) dT = \int_{\partial T} H \frac{1}{r^3} \frac{\partial V}{\partial n} ds + \\ &+ 2 \int_T \frac{H}{r^3} dT = \sum_{i=1}^p L_i \int_{\partial T_i} \frac{1}{r^3} \frac{\partial V}{\partial n} ds + \\ &+ 2 \int_T \frac{H}{r^3} dT = \\ &= 2 \left(\int_T \frac{H}{r^3} dT + \sum_{i=1}^p L_i \int_{T_i} \frac{dT}{r^3} \right). \end{aligned} \quad (7.3)$$

A (6.15) képlet a (7.2) egyenlőtlenség és a (7.3) egyenlet kombinálásával közvetlenül a bizonyítandó (7.1) egyenlőtlenségi relációt nyerjük.

7.2. Felső korlát. Legyen $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{R}) = b_r(r, z)\mathbf{e}_r + b_z(r, z)\mathbf{e}_z$ olyan r, z síkbeli vektormező, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{b} \right) + \frac{2}{r^3} = 0 \quad \mathbf{R} \in T, \quad (7.4)$$

$$\int_{\partial T_i} \frac{1}{r^3} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} ds = 2 \int_{T_i} \frac{dT}{r^3}, \quad (7.5)$$

$$(i = 1, 2, \dots, p).$$

Fennáll az

$$S \leq G \int_T \frac{1}{r^3} \mathbf{b}^2 dT \quad (7.6)$$

egyenlőtlenségi reláció.

Bizonyítás: a Schwarz-féle egyenlőtlenség alkalmazásával írhatjuk, hogy

$$\left(\int_T \frac{1}{r^3} \mathbf{b} \cdot \nabla V dT \right)^2 \leq \left(\int_T \frac{1}{r^3} \mathbf{b}^2 dT \right) \cdot \left(\int_T \frac{1}{r^3} |\nabla V|^2 dT \right). \quad (7.7)$$

A fenti egyenlőtlenség bal oldalán szereplő integrált a szorzatfüggvény deriválási szabályának és a Gauss-féle integrálatalakítási tételnek az együttes alkalmazásával átalakítjuk:

$$\begin{aligned} \int_T \frac{1}{r^3} \mathbf{b} \cdot \nabla V dT &= \int_T \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{b} V \right) dT - \\ &- \int_T V \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{b} \right) dT = \int_{\partial T} \frac{V}{r^3} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) ds + \\ &+ 2 \int_T \frac{V}{r^3} dT = 2 \left(\int_T \frac{V}{r^3} dT + \sum_{i=1}^p D_i \int_{T_i} \frac{dT}{r^3} \right). \end{aligned} \quad (7.8)$$

A (6.12), (6.15) képletek, a (7.7) egyenlőtlenség és a (7.8) egyenlet kombinálásával közvetlenül a bizonyítandó (7.6) egyenlőtlenségi relációt nyerjük.

7.3. Legyen $c = c(r, z)$ a $T + \partial T$ tartományban folytonosan differenciálható egyértékű skalár függvény.

Fennáll az

$$S \leq G \left(\int_T r^3 |\nabla c|^2 dT - 2 \int_T r \frac{\partial c}{\partial z} dT + \int_T \frac{1}{r} dT \right). \quad (7.9)$$

egyenlőtlenségi reláció.

Bizonyítás: rövid számolással kimutatható, hogy a

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(r, z) = r^3 \nabla c \times \mathbf{e}_\varphi + r \mathbf{e}_r \quad (7.10)$$

alakú $\mathbf{b} = \mathbf{b}(r, z)$ vektor, ahol $c = c(r, z)$ differenciálható egyértékű kétváltozós függvényt jelöl, kielégíti a (7.4), (7.5) egyenleteket. A (7.10) alakú $\mathbf{b} = \mathbf{b}(r, z)$ vektorral a (7.6) egyenlőtlenségi relációból az S csavarási merevségre a (7.9) felső korlátot nyerjük.

A (7.9) egyenlőtlenségből $c = 0$ helyettesítéssel az

$$S \leq G \int_T \frac{dT}{r} \quad (7.11)$$

korlátot nyerjük.

Legyen $c \neq$ állandó. A (7.9) egyenlőtlenségi reláció alapján írhatjuk, hogy tetszőleges p paraméterrel fennáll az

$$S \leq G \left[p^2 a_2 - 2 p a_1 + \int_T \frac{dT}{r} \right] \quad (7.12)$$

egyenlőtlenség, ahol

$$a_2 = \int_T r^3 |\nabla c|^2 dT, \quad (7.13)$$

$$a_1 = \int_T r \frac{\partial c}{\partial z} dT. \quad (7.14)$$

A p változó alkalmas megválasztásával a (7.12) egyenlőtlenség jobb oldala minimálissá tehető. A szóban forgó minimum értéke alapján az S csavarási merevségre vonatkozó az alábbi korlátot írhatjuk:

$$S \leq G \left\{ \int_T \frac{dT}{r} - \frac{\left(\int_T r \frac{\partial c}{\partial z} dT \right)^2}{\int_T r^3 |\nabla c|^2 dT} \right\}. \quad (7.15)$$

A fenti formulából $c = \alpha z$ (α zérustól különböző állandó) függvénnyel számolva kapjuk az igen egyszerű szerkezetű

$$S \leq G \left\{ \int_T \frac{dT}{r} - \frac{\left(\int_T r dT \right)^2}{\int_T r^3 dT} \right\} \quad (7.16)$$

felső korlátot az S számértékére.

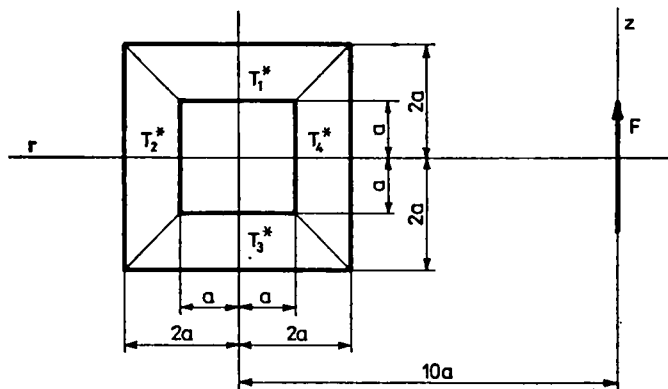
7.4. A 3. ábra üreges négyzet keresztmetszetet szemléltet.

Alsó korlát képzésére az alábbi függvényt alkalmazzuk:

$$H(v, z) = \begin{cases} -r^2 + 20ar - 96a^2 & (r, z) \in T_2^* + T_4^* \\ -z^2 + 4a^2 & (r, z) \in T_1^* + T_3^* \end{cases}. \quad (7.17)$$

A T tartomány $T = T_1^* + T_2^* + T_3^* + T_4^*$ felbontását is a 3. ábra szemlélteti. A (7.17) alakú függvény (7.1) egyenlőtlenségi relációba való helyettesítésével az S csavarási merevségre az alábbi alsó korlátot nyerjük:

$$S \geq 1,14Ga \quad (7.18)$$



3. ábra. Üreges négyzet alakú keresztmetszet

Az S csavarási merevség számára vonatkozó felső korlát képzésére a (7.11) egyenlőtlenségi relációt használva az

$$S \leq 1,23Ga \quad (7.19)$$

eredményt nyerjük.

A (7.18) és (7.19) eredmények összevetésével írhatjuk, hogy

$$1,14Ga < S < 1,23Ga. \quad (7.20)$$

Noha a fenti keresztmetszetre vonatkozólag nem ismerjük a (6.4), (6.5), (6.6), (6.7) egyenletek által kijelölt kerületérték feladat megoldását, így S értékének meghatározására nem használhatjuk a (6.12) képletet.

IRODALOM

1. MICHELL, I. H.: Uniform Torsion Flexure of incoplate Tores. *Proceedings of the London Mathematical Society* **31** (1899), 140–141
2. GÖHNER, O.: Spannungsveteilung in einem an den Endquerschnitten belasteten Ringstabsektor. *Ingr-Arch.* **2** (1931), 381–414
3. LIESECKE, G.: Berechnung zylindrischer Schraubenfedern mit rechteckigem Drahtquerschnitt. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* **77** (1933), 425–426
4. TRICOMI, F.: Su di un notevole caso di deformazione di una trave curve. *Atti Reale Accademia della Scienze di Torino* **73**, part. 1 (1937), 79
5. WAHL, A. M.: The Calculation of Rectangular Bar Helical springs. *Journ. Appl. Mechn.* **10** (1952), 110–122
6. TIMOSHENKO, S. and GOODIER, I. N.: Theory of Elasticity. 2nd edition. McGraw Hill, 1951
7. FREIBERGER, W.: The Uniform torsion of an Incomplete Tore. *Australian I. Scient. Res. Ser. A*, **2** (1949), 354–375
8. LANGHAAR, H. L.: Torsion of Curved Beams of Rectangular Cross Section. *J. Appl. Mechn.* **19** (1952), 49–54
9. CHATAJI, P. P.: Torsion of Curved Beams of Rectangular Cross Section Having Transverse Isotropy. *ZAMM.* **38** (1958), 157–159
10. ANCKER, G. J.—GOODIER, I. N.: Pitch and Curvature Corrections for Helical Springs. *Journ. Appl. Mech.* (1958), 466–470
11. ANCKER, G. J.—GOODIER, J. N.: Theory of Pitch and Curvature Corrections for the Helical Springs I. Tension. *Journ. Appl. Mech.* (1958), 471–483
12. ANCKER, G. J. GOODIER, J. N.: Theory of Pitch and Curvature Corrections for the Helical Springs II. Torsion. *Journ. Appl. Mech.* (1958), 484–495
13. STEIN, I.: Stress Analysis of a Helical Coil. *Journ. Appl. Mech.* **30** (1963), 122–126
14. LEHNICKIJ, Sz. G.: Krucsenie anizotropnovo krivogo Brusze. *Prik. Mat. Meh.* **24** (1980), 433–437
15. LEHNICKIJ, Sz. G.: Krucsenie anizotropnih i nesgnorodnih szterzsnej. *Izd. Nauke. Fiz-Mat. Literaturi.* Moszkva (1971), 211–215
16. Szoljanik KRASSZA, K. V.: K. rászcseti vintovih pruzsin. Tr. Leningrad. Kalina 1950, No. 2.
17. RABINOVICS, A. L.: Krucsenie elementa krugovovo kolca. Isszledovanija po Mehanike i prikladnoj matematike. Tr. Moszk. Fiz-techn. inta. 1958. Vip. 1.
18. ANDERSON, N.—ARTHURS, M. A.: Complementary Variational Principles for a Boundary Value Problem in Twisting of Ring Sectors. *Quart. of Appl. Math.* April. (1975), 87–89
19. ARTHURS, A. M.—DUGGAN, R. C.: Modified Complementary Variational Principles for a Boundary Value Problem in Twisting of Ring Sectors. *Quart. of Appl. Math.* October (1975), 304–307
20. TIMOSHENKO, Sz. P.—GOODIER, I. N.: Teorija uprugoszti. *Izd. Naunka. Fiz.-Mat. Literaturi.* Moszkva 1975, 430–433

Contribution to the Torsion Problem of Bars with Circular Centre-line. — The so-called uniform torsion problem of elastic bars having a circular centre-line and constant cross section is dealt with. The results of the paper relate to the bars of cross section of manifold interconnections. The proofs of the lower and upper limits relating to the torsional stiffness of a bar having a circular centre-line are predominantly based on the Schwarz-inequality.

Beitrag zum Torsionsproblem von Stäben mit Kreismittellinie. — Es wird das sog. gleichmäßige Torsionsproblem von Stäben aus elastischem Material, mit konstantem Querschnitt und kreisförmigen Mittellinie behandelt. Die erhaltenen Resultate beziehen sich auf Stäbe mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt. Die auf die unteren und oberen Torsionssteifheitsgrenzen eines Stabes bezüglichen Nachweise beruhen überwiegend an der Anwendung der Schwarzschen Ungleichheit.

AZ ÉRINTKEZÉSI NYOMÁS MEGOSZTLÁSÁNAK OPTIMÁLÁSA

PÁCZELT ISTVÁN*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. augusztus 27-én]

A jelen tanulmány egy számítástechnikailag egyszerűen realizálható eljárást ismertet a súrlódás nélküli érintkezésnél fellépő érintkezési nyomás megoszlásának optimalizálására. Oly módon keressük a p nyomás maximumának minimumát, hogy az érintkezési tartomány határának közelében a nyomás lefutása biztosítsa azt a feltételt, hogy a terhelés átadásánál kialakuló feszültségállapot az érintkezési tartomány pontjaiban ne legyen szinguláris. Ezt a testek határoló felületének megfelelő kialakításával érjük el. Az optimalizált alakot lineáris programozási feladat megoldásából nyerjük. Tételeket állítunk fel a p vezérlésével kapcsolatosan, vizsgáljuk a súrlódási teljesítményvesztés hatását a p_{\max} minimalizálására. Vékonyfalú héjaknál, lemezeknél, illetve prizmatikus tartóknál az optimalizációnál kialakuló falvastagság változás hatását a hatásfüggvény Taylor-sor szerinti sorbafejtésével vesszük figyelembe. Vizsgáljuk véges elemes elmozdulás módszer esetében a hatásmátrixnak, ismert terhelésből származó elmozdulásoknak és ezek hézag szerinti deriváltjainak előállítási kérdéseit. Számpéldákat mutatunk be a p vezérlésére síkbeli gyűrűalakú testek érintkezése esetén, továbbá az érintkezési nyomással arányos kopás időbeli lefolyását is vizsgáljuk.

1. Bevezetés

A tervezőmérnökök arra törekednek, hogy a terhelésátadásnál kialakuló feszültségállapot szingularitásokat ne tartalmazzon, a maximális redukált feszültség, a testek egymáson történő elcsúszása esetében keletkező súrlódási teljesítményvesztés és kopás kicsiny legyen.

Azokban az esetekben, amikor a terhelésátadás a testek között érintkezés formájában valósul meg, az érintkezésben álló testek felületének megfelelő szabályozásával, kialakításával, egyes mechanikai mennyiségeket optimalni lehet.

Optimalizációs feladat lehet az érintkezési nyomás maximumának minimálása (min max p), vagy az érintkezési nyomás függvénynek olyan „vezérlése” is, amikor a nyomás függvénytől a zérus értékhez történő sima átmenetet is megköveteljük a min max p cél elérése mellett.

Nyilvánvaló, hogy a min max p értékét a szóban forgó érintkezési tartomány nagysága is befolyásolja. Az utóbbi növelésével a nyomás maximuma ugyan csökken, de a testek egymáson történő elcsúszása esetében a súrlódási teljesítményvesztés nő. Ezekben az esetekben a tervezőnek a szerkezet működésével kapcsolatos kívánalmakat is figyelembe kell vennie akkor, amikor eldönti, hogy az ellentétes hatások közül melyik kapjon nagyobb súlyt.

* Dr. Páczelt István, 3531 Miskolc, Győri kapu 37, III. 3.

A téma gazdag irodalmából a merev bélyeg alakjának meghatározásával foglalkozik CONRY, T. F. és SEIREG, A. [1] munkája. A féltérben nyomott tengelyszimmetrikus bélyeg felületének meridián görbét kvadratikus polinom alakjában keresik. Az ismeretlen állandókat a $\min \max p$ célfüggvény segítségével számították ki. Jó közelítésben kapták meg az állandó $p_0 = F/A$ értékét, ahol F — a terhelő erő, A — a bélyeg keresztmetszetének felülete. Ugyanakkor a bélyeg szélén fellépő feszültségállapot szinguláris lett, mivel az érintkezési nyomás függvényben a szakadás megmaradt.

Tartók vonatkozásában ZSURAVLEVA, T. A. és PANOVKO, J. G. [2] a kezdeti hézag hatását vizsgálja. Az érintkezési tartományt előre kijelölve, ott állandó nyomást feltételezve, keresik a kezdeti hézag értékét, amikor is a rugalmas alap Winkler-típusú. PÁCZELT, I. és HERPAI, B. [3] a rövid vékonyfalú körhenger héjak közötti állandó nyomást biztosító kezdeti hézagot határozzák meg.

Számos munka a görgőscsapágyak görgőjének lekerekítését vizsgálja [4], [5], [6]. Ezekben az esetekben a görgő középső része hengeres, míg végei találomra felvett sugárral vannak lekerekítve.

SINGH, K. P. és PAUL, B. [4] a testeket végtelennek tekintik, ami nyilvánvalóan pontatlanságot okoz, különösen a lekerekített végeken. Számításaik szerint a maximális nyomás csökkenthető, ami a görgőscsapágy élettartamára kedvező befolyást gyakorol.

HARNETT, M. J. [6] is a végtelen féltérre vonatkozó összefüggéseket használja fel a hatásmátrix meghatározására. Térbeli ábrái a nyomásmegoszlásáról adnak igen szemléletes képet.

HAUG, E. J. és KWAK, B. M. [7] a $\min \max p$ értéket a test peremének (felületének) megváltoztatási mértékére előre adott korlát mellett keresi a végeles elmozdulási módszer felhasználásával.

Megállapítható, hogy a fenti munkák egyikében sincs az érintkezési nyomás lefutásának képe előírtan vezérelve.

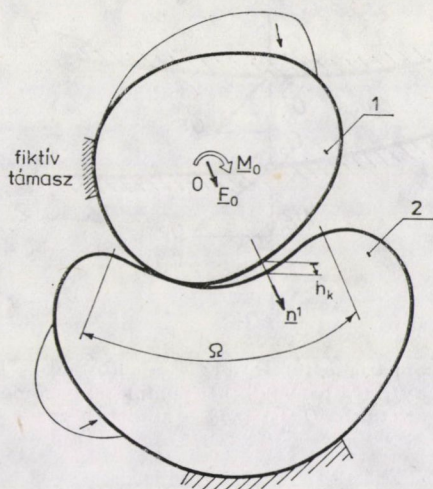
A jelen munkában ennek a kérdésnek megoldását keressük.

2. Az optimalizációs probléma megfogalmazása

Az általánosság megszorítása nélkül vizsgáljuk az 1. ábrán vázolt lineárisan rugalmas rendszert. Feltételezzük, hogy a fellépő elmozdulások, alakváltozások kicsinyek, a testek közötti súrlódás — az érintkezési nyomás meghatározásakor — elhanyagolható.

2.1. A súrlódás nélküli érintkezési feladat felállítása

Terheletlen állapotban a két test között az n^1 irányában mért kezdeti hézagot jelölje $h_k = h_k(x)$, ahol az x az (x^1, x^2) felületi koordinátát jelöli; legyen n^1 az első test felületének külső normálisa. Az első testre ható ismert erőrend-



1. ábra. Az érintkezésben álló rugalmas rendszer elemei: az 1 jelű merevtestszerű elmozdulással rendelkező test és a 2 jelű merevtestszerű elmozdulással nem rendelkező test. Ω — a szóba jöhető érintkezési tartomány, h_k kezdeti hézag értelmezése $[F_0, M_0]$ — az 1-es testre ható ismert külső terhelés 0 pontra vonatkoztatott redukált vektorkettőse

szernek a koordinátarendszer kezdőpontjára számított vektorkettőse legyen $[F_0, M_0]$, az Ω szóba jöhető érintkezési tartománytól távoli helyen (ideiglenesen) megfogott test Green-függvényét jelölje $H^1(x, x')$: ami fizikai tartalmát tekintve, a felületen ható $n^1(x')$ normális irányú egységnyi terheléshez tartozó $n^1(x)$ irányú elmozdulásnak felel meg, míg a 2-es testen a hatásfüggvény legyen $H^2(x, x')$.

Jelölje az 1-es ideiglenesen megfogott és a 2-es merevtestszerű elmozdulást nem végző testekre ható, ismert erőrendszerekből származó Ω tartománybeli n^1 irányú elmozdulásokat $f^1(x)$ és $f^2(x)$, továbbá az első test merevtestszerű elmozdulásából származó, ugyancsak $n^1(x)$ $x \in \Omega$ irányú elmozdulást $d(x)$. Legyen a helyvektor R , az elemi felület dS .

Ekkor a súrlódás nélküli érintkezési peremértékfeladatot az

$$F_-^{\text{def}} F_0 - \int_{\Omega} n^1 p dS = 0, \quad (2.1)$$

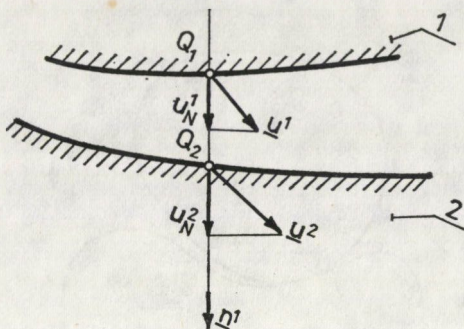
$$M_-^{\text{def}} M_0 - \int_{\Omega} R \times n^1 p dS = 0, \quad (2.2)$$

első testre felírt egyensúlyi egyenletek, a

$$g(x) = \int_{\Omega'} H(x, x') p(x') dS' + f^2(x) - f^1(x) + h_k(x) - d(x) \geq 0 \quad (2.3)$$

testek egymásba hatolhatatlanságát kifejező egyenlőtlenség, a

$$p(x) \geq 0 \quad x \in \Omega \quad (2.4)$$



2. ábra. Az érintkezés-rés geometriai feltétele, ha $g^{\text{def}} = u u_N^2 - u_N^1 + h_k = 0$ érintkezés, ha $g > 0$ rés lép fel. Itt $u_N^1 = \mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1$ a Q_1, Q_2 párbaállított pontok elmozdulásának \mathbf{n}^1 normális irányú vetülete, $Q_1 Q_2 = h_k$ — kezdeti hézag

érintkezési nyomás nem negatív értékűségét, illetve a

$$p(x) > 0, \quad g(x) = 0 \quad x \in \Omega_p \quad (2.5a)$$

érintkezési, a

$$p(x) = 0, \quad g(x) \geq 0 \quad x \in \Omega_0 \quad (2.5b)$$

rés feltételhez tartozó egyenlet-egyenlőtlenségek, illetve a belőlük következő

$$p(x) g(x) = 0 \quad x \in \Omega \quad (2.6)$$

feltétel jelöli ki. Itt a koordinátarendszer kezdő pontjával egybeeső első test pontjának λ_F eltolódásából és környezetének λ_M merevtestszerű elfordulásából származó Ω tartománybeli merevtestszerű elmozdulás

$$d(x) = \lambda_F \cdot \mathbf{n}^1(x) + \lambda_M \times \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}^1(x), \quad (2.7)$$

míg a rugalmas rendszerre vonatkozó hatásfüggvény

$$H(x, x') = H^1(x, x') + H^2(x, x'),$$

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_p.$$

A megoldás megkeresését megnehezíti az a tény, hogy Ω_0 és Ω_p tartományok előzetesen nem ismeretesek.

Bizonyítható, hogy a (2.1)–(2.8) alatti érintkezési feladat megoldását az

$$L = \tilde{\Pi}_c + \lambda_F \cdot \mathbf{F} + \lambda_M \cdot \mathbf{M} \quad (2.9)$$

Lagrange-féle függvény

$$\delta_p L \geq 0, \quad p \geq 0, \quad \delta_{\lambda_F} L = 0, \quad \delta_{\lambda_M} L = 0 \quad (2.10)$$

szabályok szerinti variálásával is megkaphatjuk [8, 9]. Itt

$$\tilde{N}_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega'} p(x) H(x, x') p(x') dS' dS - \int_{\Omega} (f^1 - f^2 - h_k) p dS \quad (2.11)$$

továbbá a $\delta_x L$ az x változó szerint vett első variációt jelenti. Így módon az érintkezési feladat megoldását a

$$\min \{ \tilde{N}_c \mid p \geq 0, \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0} \} \quad (2.12)$$

kvadratikus programozási feladat megoldása révén kapjuk meg.

2.2 Az érintkezési nyomásfüggvény vezérlése

Általában a nem-optimált alakú testek közötti érintkezésénél kialakuló érintkezési nyomás erőteljesen változó jellegű (pl. szimmetrikus kialakítású és terhelésű síkbeli testeknél a 3-a ábrán feltüntetett függvény szerint változik). Célunk a maximális érték csökkentése mellett a nyomásfüggvény lefutásának vezérlése.

A vezérlést az Ω_{opt} felett értelmezzett

$$\chi = \chi(p_{\max}, p, x) \geq 0 \quad x \in \Omega_{\text{opt}} \quad (2.13)$$

egyenlőtlenséggel kívánjuk leírni. Ez a tartomány természetesen eltérhet az Ω_p tényleges-, illetve az optimálás nélküli feladatnál felvett Ω szöbe jöhető érintkezési tartománytól. Annak megválasztását a szerkezet működése szabja meg.

Ha a χ függvénytől megkívánjuk, hogy biztosítsa azt, hogy az Ω_{opt} tartomány bármely x pontjában az érintkezési nyomás értéke ne haldja meg a p_{\max} $v(x)$ -szeresét, akkor a vezérlő függvény

$$\chi(x) = v(x) p_{\max} - p(x) \geq 0, \quad x \in \Omega_{\text{opt}} \quad (2.14)$$

alakú, ahol $0 \leq v(x) \leq 1$, $p_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \max p$. A felvett $v(x)$ vezérlő függvényből $p(x) \leq p_{\max}$ következik.

Vizsgáljuk a $v(x)$ vezérlő függvény néhány lehetséges alakját egyváltozós esetben ($x \equiv x^1$).

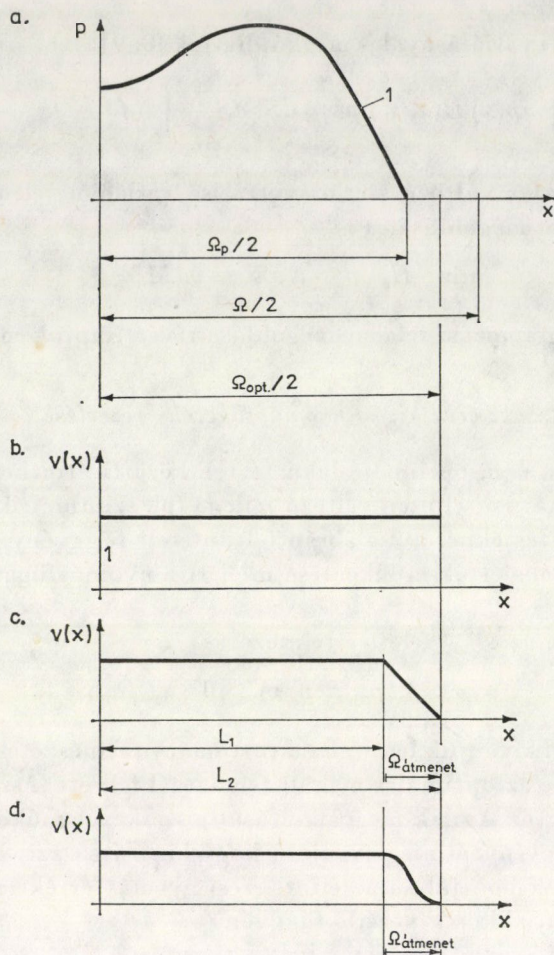
1. Az $x \in \Omega_{\text{opt}}$ tartomány felett a

$$v(x) = 1 \quad (2.15)$$

függvény (3-b ábra) az érintkezési nyomás állandóságát biztosíthatja.

2. A

$$\begin{aligned} v(x) &= 1, & 0 \leq x \leq L_1 \\ v(x) &= \frac{L_2}{L_2 - L_1} - \frac{1}{L_2 - L_1} x, & L_1 \leq x \leq L_2 \end{aligned} \quad (2.16a, b)$$



3. ábra. A p érintkezési nyomás függvény és a különböző típusú $v(x)$ vezérlő függvények egyváltozós esetben

vezérlés (3-c ábra) trapéz alakú nyomás-megoszlást eredményezhet.

3. C^1 osztályú átmenetet biztosíthat a

$$v(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (2.17a, b)$$

$$v(x) = 1 - 3 \left(\frac{x - L_1}{L_2 - L_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{x - L_1}{L_2 - L_1} \right)^3, \quad L_1 \leq x \leq L_2$$

vezérlő függvény (3-d ábra), hisz az $x = L_1$ és az $x = L_2$ helyeken $dv(x)/dx = 0$.

Megjegyzés-1: Az 1.-beli eset kétváltozós esetre is érvényes.

Megjegyzés-2: Amennyiben az $x \in \Omega_{opt}$ tartomány pontjaiban az $x = L_2 + 0$ helyen a külső terhelés zérus, úgy a C^1 osztályú átmenetet biztosító vezérléssel

(az 1. testre ható terhelés redukált vektorkettőstől függően, lásd az alábbi tételket) elérhető, hogy a terhelésátadásnál az $x \in \Omega_{\text{opt}}$ tartományban a feszültség-állapot ne tartalmazzon szinguláris pontot, ugyanis a $\sigma_N = -p$ normál feszültségben nem lép fel szakadás.

[2.3 Tételek a p_{max} -al kapcsolatosan

Az alábbiakban a maximális nyomás értékével kapcsolatos tételt fogalmazzuk meg. Feltételezzük, hogy az 1-es test vagy merevtestszerű $z \equiv x^3$ irányú eltolódással, vagy $y \equiv x^2$ tengelykörüli elfordulással, vagy mindkettővel rendelkezik. Felmerül a kérdés, lehet-e számításainkban $\chi(x) = 0$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$ értékkel dolgozni, és ha igen, milyen esetekben, a $v(x)$ -től hogyan függ a p_{max} ?

Ezt a kérdéskört az alábbi megjegyzéssel vezetjük be.

Megjegyzés-3: Amennyiben az 1-es test csak merevtestszerű (függőleges) eltolódással rendelkezik, úgy az 1. alatti $v(x)$ -el nyert $p(x) \equiv p_{\text{max}}$ maximális nyomás értéke kisebb lesz, mint a 2. és 3. alatti vezérlő függvény esetében kaptak. A p_{max} akkor lesz minimális — a (2.1)-ből nyert függőleges irányú erők egyensúlyát is figyelembe véve —, ha a (2.14) egyenlőség formájában áll fenn, azaz $p(x)$ hozzásimul a $v(x)$ p_{max} „burkoló görbéhez”. Következésképpen p_{max} annál kisebb, minél nagyobb az

$$I = \int_{\Omega_{\text{opt}}} v(x) dS = \int_0^{L_1} v(x) dx$$

integrál értéke.

Állításunkat a következőképpen lehet könnyen belátni.

A (2.1) egyensúlyi egyenletet a (2.14) felhasználásával és az $n^{(1)}(x) = e_z$, $F_0 = F_0 e_z$ feltételezéssel felírva, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F &= F_0 = \int_{\Omega_{\text{opt}}} p(x) dS = F_0 - \int_0^{L_1} p(x) dx = \\ &= F_0 - \int_0^{L_1} (v(x) p_{\text{max}} - \chi(x)) dx = 0, \end{aligned}$$

azaz

$$p_{\text{max}} = \frac{F_0}{I} + \frac{\int_0^{L_1} \chi(x) dx}{I},$$

amiből p_{max} minimumát akkor nyerjük, ha

$$\int_0^{L_1} \chi(x) dx = 0 \Rightarrow \chi(x) \equiv 0,$$

vagyis, amikor a $p(x)$ hozzásimul a $v(x)$ p_{max} függvényhez. Itt

$$I = \int_0^{L_1} v(x) dx.$$

Ebből következik az alábbi tétel.

Tétel-1: Ha az 1-es test az érintkezés-elválás geometriai feltételét kijelölő $\mathbf{n}^1(x) = \mathbf{e}_z$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$ irányú merevtestszerű eltolódással rendelkezik, akkor az optimálási feladat esetében $p(x) = v(x) p_{\text{max}}$ és p_{max} annál kisebb, minél nagyobb az

$$I = \int_{\Omega_{\text{opt}}} v(x) dS$$

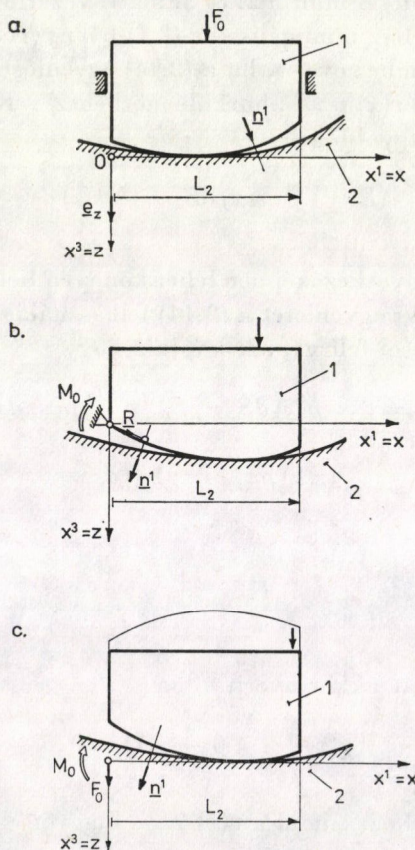
integrál értéke.

Az 1.—3. esetbeli vezérléskor a 2. ábra jelölését figyelembe véve, a szóban forgó integrál értéke

$$I_1 = L_1 + (L_2 - L_1),$$

$$I_2 = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{2},$$

$$I_3 = L_1 + \frac{11}{12} (L_2 + L_1),$$



4. ábra. Az érintkezési nyomás vezérléséhez kapcsolódó ábrák. Az 1 jelű test a) merevtestszerű eltolódással, b) merevtestszerű elfordulással, c) mindkettővel rendelkezik

azaz

$$I_1 > I_2 > I_3,$$

tehát a min p_{\max} szempontjából a legkedvezőtlenebb a 3. eset, de a feszültség-állapot szingularitásának elkerülése céljából ez a legkedvezőbb.

A (2.2) egyenletről $\mathbf{n}^1(x) = \mathbf{e}_z$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$, $\mathbf{M}_0 = -M_0 \mathbf{e}_y$ feltétel mellett — a Tétel-1-nél tett megfontolások alapján — következik a

Tétel-2: Ha az 1-es test y tengely körüli merevtestszerű elfordulással rendelkezik, akkor $\mathbf{n}^1(x) = \mathbf{e}_z$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$, $x^1 > 0$ esetében az optimálási feladatnál kialakuló érintkezési nyomás $p(x) = v(x) p_{\max}$, továbbá p_{\max} annál kisebb, minél nagyobb az

$$\bar{I} = \int_{\Omega_{\text{opt}}} x^1 v \, dS$$

integrál értéke.

A (2.1) és a (2.2) egyenletek együttes vizsgálatából az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg.

Tétel-3: Abban az esetben, ha az 1-es test z tengelyirányú merevtestszerű eltolódással és y tengely körüli elfordulással rendelkezik, akkor az $\mathbf{n}^1(x) = \mathbf{e}_z$, $x^1 > 0$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$ feltétel mellett a

$$p_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} v \, dS} = \frac{M_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} x^1 v \, dS}$$

egyenlőség fennállásakor az optimalizációs feladatnál a $p(x)$ érintkezési nyomás-függvény hozzásimul a $v(x) p_{\max}$ függvényhez. A $p_{\max} = p_0$ annál kisebb, minél nagyobb az $\int_{\Omega_{\text{opt}}} v \, dS$ vagy az $\int_{\Omega_{\text{opt}}} x^1 v \, dS$ integrál értéke.

Igazolás: Az \mathbf{e}_z és \mathbf{e}_y egységvektorokkal skalárisan megszorozott (2.1) és (2.2) egyenletekbe a (2.14)-en keresztül kifejezett $p(x)$ -et behelyettesítjük, majd rendezzük azokat, aminek eredményeképpen a

$$p_{\max} = \frac{F_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} v \, dS} + \frac{\int_{\Omega_{\text{opt}}} \chi \, dS}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} v \, dS},$$

illetve a

$$p_{\max} = \frac{M_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} x^1 v \, dS} + \frac{\int_{\Omega_{\text{opt}}} x^1 \chi \, dS}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} x^1 v \, dS}$$

kifejezésekhez jutunk. $\chi(x) > 0$ esetében a $\chi(x)$ függvényt tartalmazó integrálok pozitívak, és ezért min p_{\max} -ot csak akkor kapunk, ha $\chi(x) \equiv 0$ az $x \in \Omega_{\text{opt}}$ tartományban, ez pedig csak a tételbeli egyenlőség esetében áll fenn.

A fenti tételből azonnal következik az alábbi

Tétel-4: Amennyiben az 1-es test z irányú merevtestszerű eltolódásakor és y tengelykörüli elfordulásakor

$$\frac{F_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} v \, dS} \neq \frac{M_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} x^1 v \, dS} ,$$

úgy mindig lesznek olyan pontok, ahol

$$\chi(x) = v(x) p_{\max} - p(x) > 0 ,$$

továbbá $p_{\max} > p_0$.

A fentiekben $\mathbf{n}^1(x) = \mathbf{e}_z$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$ egyenlőséget tételezünk fel. Amennyiben ez nem áll fenn, úgy a Tétel 1–4 helyett az alábbiak fogalmazhatók meg:

Tétel-5: Az 1-es test \mathbf{e}_z irányú merevtestszerű eltolódásakor a p_{\max} akkor lesz a legkisebb, ha $\chi(x) \equiv 0$ és a $v(x)$ olyan, hogy a

$$\int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 v \, dS$$

integrál értéke a $0 \leq v \leq 1$, $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 > 0$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$ feltétel mellett a lehető legnagyobb.

Igazolás: A (2.1) egyensúlyi egyenletet \mathbf{e}_z egységvektorral megszorozva, majd a (2.14) felhasználásával kifejezett $p(x)$ -et ebbe behelyettesítve, és a kapott egyenletet rendezve, azt kapjuk, hogy

$$p_{\max} = \frac{F_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 v \, dS} + \frac{\int_{\Omega_{\text{opt}}} \chi \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 \, dS}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 v \, dS} ,$$

amiből a p_{\max} minimumát $\chi(x) \equiv 0$ -nál nyerjük.

Tétel-6: Az 1-es test y tengelykörüli merevtestszerű elfordulásakor a p_{\max} akkor lesz a legkisebb, ha $\chi(x) \equiv 0$ és $v(x)$ olyan, hogy az

$$\mathbf{e}_y \cdot \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 v \, dS$$

integrál a $0 \leq v \leq 1$, $\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 > 0$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$ feltétel mellett a lehető legnagyobb.

Igazolás: Az 5. tétel igazolásánál tett lépéseket az \mathbf{e}_y egységvektorral megszorozott (2.2) egyensúlyi egyenletre kell elvégezni.

Tétel-7: Az 1-es test z irányú merevtestszerű eltolódásakor és y tengelykörüli elfordulásakor, amennyiben fennáll az

$$\frac{F_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 v \, dS} = \frac{M_0}{\mathbf{e}_y \cdot \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 v \, dS} \stackrel{\text{def}}{=} p_0 ,$$

összefüggés, úgy $\chi(x) \equiv 0$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$, azaz $p(x)$ hozzácsimul a $v(x)$ p_{\max} függvényhez. A $p_{\max} = p_0$ értéke adott terheléskor annál kisebb, minél nagyobb az

$$\int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 v \, dS \quad \text{vagy} \quad \mathbf{e}_y \cdot \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 v \, dS$$

integrál értéke az $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 > 0$, $\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 > 0$, $0 \leq v \leq 1$ korlátok mellett.

Igazolása a Tétel-3-nál végrehajtott lépések értelemszerű ismételtesével végezhető el.

Tétel-8: Amennyiben az 1-es test z irányú merevtestszerű eltolódással és y tengelykörüli elfordulással rendelkezik, és a

$$p_0^F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_0}{\int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 v \, dS} \neq \frac{M_0}{\mathbf{e}_y \cdot \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 v \, dS} \stackrel{\text{def}}{=} p_0^M,$$

feltétel teljesedik, úgy találhatók olyan pontok, ahol

$$\chi(x) > 0,$$

továbbá áll az, hogy

$$p_0^M < p_{\max} > p_0^F.$$

Megjegyzés-4: A Tétel-5—8-ban feltételeztük, hogy az 1-es test \mathbf{e}_z irányú merevtestszerű eltolódással és y tengelykörüli elfordulással rendelkezik. Formálisan a tételek érvényesek arra az esetre is, amikor a merevtestszerű eltolódás általános ismert \mathbf{e} irányú, ill. a szögelfordulás az ugyancsak ismert \mathbf{e}_φ vektorral párhuzamos. Ekkor az $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{e}_z$ és az $\mathbf{e}_\varphi \rightarrow \mathbf{e}_y$ megfeleltetéssel a Tétel-5—8 alattiak érvényben maradnak.

Megjegyzés-5: Ismeretlen irányú merevtestszerű eltolódáskor, illetve szögelforduláskor a (2.1) és a (2.2) egyenletekbe a (2.14)-ből kifejezett $p(x)$ behelyettesítése után, az

$$\mathbf{F}_0 - p_{\max} \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{n}^1 v \, dS + \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{n}^1 \chi \, dS = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{M}_0 - p_{\max} \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 v \, dS + \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 \chi \, dS = \mathbf{0}$$

egyenletekhez jutunk. Ekkor a $\chi \equiv 0$ simuláshoz a

$$p_{0x}^F = F_{0x} / \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}^1 v \, dS \quad (x \leftrightarrow y \leftrightarrow z)$$

$$p_{0x}^M = M_{0x} / \mathbf{e}_x \cdot \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 v \, dS \quad (x \leftrightarrow y \leftrightarrow z)$$

menyiségek definiálásával a

$$p_{0x}^F = p_{0y}^F = p_{0z}^F = p_{0x}^M = p_{0y}^M = p_{0z}^M$$

egyenlőség teljesedésére volna szükség az $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}^1 > 0$, az $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 > 0$ és a $0 \leq v(x) \leq 1$ kötöttségek mellett. Ez gyakorlatilag nem áll fenn!

2.4 Az érintkezési nyomás és a kezdeti rés meghatározására szolgáló optimalizációs feladat felállítása

A vezérelt nyomást oly módon kívánjuk biztosítani, hogy feltételezzük az Ω_{opt} tartományban a relatív g hézag (rés) zérus értékét. Ebből adódóan a testek egymásba hatolhatatlanságának feltételét kifejező (2.3) egyenlőtlenség helyett a

$$g(x) = \int_{\Omega'} H(x, x') p(x') dS' + f^2(x) - f^1(x) + h_k(x) + \Delta h(x) - d(x) = 0 \quad (2.18)$$

egyenlőség írható. Itt Δh — a kezdeti hézag megváltozása, amit az első test kontúrjának megváltoztatásával kívánunk biztosítani.

Ily módon a (2.1)–(2.2) egyensúlyi egyenletek, a vezérlést leíró (2.14) egyenlőtlenség és az előbbi (2.18) egyenlőség, mint mellékfeltételek (korlátok) mellett keressük a p_{max} minimumát. Vagyis az optimalizációs feladat az alábbi: Keressük a p_{max} minimumát az

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_0 - \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{n}^1 p dS = \mathbf{0}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{M} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}_0 - \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 p dS = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

egyensúlyi egyenletek, a

$$g_0(x) = \int_{\Omega'_{\text{opt}}} H(x, x') p(x') dS' + \underbrace{f^2(x) - f^1(x)}_{-l_k(x)} + h_k(x) - d(x) + \Delta h(x) = 0 \quad (2.21)$$

érintkezés geometriai feltétele, továbbá a vezérléssel kapcsolatos

$$\chi(x) = v(x) p_{\text{max}} - p(x) \geq 0 \quad (2.22)$$

egyenlőtlenségi feltétel mellett, azaz a

$$\min \{p_{\text{max}} \mid \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}; p(x) \geq 0, g_0(x) = 0, \chi(x) \geq 0 \mid x \in \Omega_{\text{opt}}\} \quad (2.23)$$

lineáris programozási feladat megoldása révén jutunk a kitűzött cél megoldásához.

Megjegyzés-6: Azokban az esetekben, amikor a $p(x)$ függvény hozzásimul a $v(x) p_{\text{max}}$ burkoló függvényhez, az egyensúlyi egyenletekből p_{max} ismertté válik és a $g_0(x) = 0$ egyenletből a $\Delta h(x) - d(x) = l(x)$ értéke közvetlenül meghatározható. Ily módon lineáris programozási feladat megoldására nincs szükség.

A $d(x)$ -et oly módon tudjuk meghatározni, hogy a merevtestszerű elmozdulással rendelkező test szabadságfokának megfelelő számú pontban a kezdeti hézag $\Delta h(x)$ megváltozását zérusra írjuk elő. Ezáltal a $d(x)$ -ben szereplő λ_F , illetve λ_M ismertté válik.

Megjegyzés-7: A (2.21) felírásakor feltételeztük, hogy a $\Delta h(x)$ -ből adódóan a $H(x, x')$, illetve az $f^i(x)$ elmozdulások megváltozásának mértéke jóval kisebb, mint a $\Delta h(x)$. Amennyiben ettől nem tekinthetünk el, úgy a hatásfüggvényt és az ismert elmozdulásokat Taylor-sorba fejtjük:

$$H(x, x') = H_k(x, x') + \frac{\partial H(x, x')}{\partial h(x)} \Big|_k \Delta h(x) + \frac{\partial H(x, x')}{\partial h(x')} \Big|_k \Delta h(x') + \dots \quad (2.24)$$

$$f(x) = f_k(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial h(x)} \Big|_k \Delta h(x) + \dots, \quad (2.25)$$

ahol a k alsó index a kezdeti geometriánál vett értékre utal.

Ekkor a (2.21) helyett a sorbafejtés lineáris tagjaival

$$\begin{aligned} g_0(x) &= \int_{\Omega'_{\text{opt}}} H_k(x, x') p(x') dS' + \underbrace{f_k^2(x) - f_k^1(x) + h_k(x)}_{-f_k(x)} \\ &+ \Delta h(x) - d(x) \\ &+ \int_{\Omega'_{\text{opt}}} \frac{\partial H(x, x')}{\partial h(x)} \Big|_k (h(x) + h(x')) p(x') dS' + \frac{\partial f(x)}{\partial h(x)} \Big|_k \Delta h(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

egyenlet írható, mivel

$$\frac{\partial H(x, x')}{\partial h(x)} = \frac{\partial H(x, x')}{\partial h(x')}, \quad f(x) = f^2(x) - f^1(x).$$

A szaggatott vonallal aláhúzott integrál ismeretlenek szempontjából nem lineáris vagyis a (2.23) feladat a (2.26) alatti $g_0(x) = 0$ feltétellel már nem jelent lineáris programozási feladatot.

Amennyiben az optimalizációs érintkezési feladatot iteráció útján kívánjuk felépíteni, akkor az első lépésben a $\partial H / \partial h = 0$, $\partial f / \partial h = 0$ összefüggéseket tételezzük fel, majd a kapott p érintkezési nyomást betéve a szaggatott vonallal aláhúzott integrálba, az integrál a $\Delta h(x)$ -ben lineáris lesz, és így a (2.23) feladat ismételten lineáris programozási feladatnak felel meg. A megoldásból kapott p -t ismételten behelyettesítve az említett integrálba, a (2.23)-at újból megoldjuk. Az iterációt mindaddig folytatjuk, míg az egymást követő $I-1$, I -edik iterációban kapott nyomásokra

$$|p^I(x) - p^{I-1}(x)| \leq \varepsilon$$

vagy a kezdeti hëzag megváltozásra vonatkozó

$$|\Delta h^I(x) - \Delta h^{I-1}(x)| \leq \vartheta$$

egyenlőtlenségek fenn nem állnak, ahol ε és ϑ előírt kicsiny értékek.

A megoldásnak a fentiek szerinti felépítésekor, a $H(x, x')$, $f(x)$ függvényeket, illetve azok deriváltjait a kezdeti alakhoz tartozóan számítottuk ki, s nem állapítottuk meg minden iteráció után ezeknek a megváltozott geometriához tartozó értékeit.

A megoldás ilyen felépítése akkor jöhet szóba, amikor a Δh megváltozása nem jelentős. Természetesen a (2.24), (2.25) alatti sorbafejtéseket vékonyfalú szerkezeti elemek érintkezésekor a falvastagság szerinti sorbafejtéssel is helyettesíthetjük. Ekkor a

$$H(x, x') = H_k(x, x') + \frac{\partial H(x, x')}{\partial b(x)} \Big|_k \Delta b(x) + \dots,$$

$$f(x) = f_k(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial b(x)} \Big|_k \Delta b(x) + \dots,$$

képletekből és az alábbiakból látni fogjuk, hogy állandó vastagságú kezdeti szerkezeti elemek esetében a deriváltak kiszámítása igen egyszerűvé válik.

Például prizmatikus tartók esetében, mivel a hatásfüggvény és a külső terhelésből származó elmozdulás formailag

$$H(x, x') = \frac{1}{b^3} \tilde{H}(x, x'), \quad f(x) = \frac{1}{b^3} \tilde{f}(x)$$

alakban állíthatók elő, ezért a szóbanforgó deriváltak a

$$\frac{\partial H(x, x')}{\partial b(x)} = -\frac{3}{b} \tilde{H}(x, x'), \quad \frac{\partial f(x)}{\partial b(x)} = -\frac{3}{b} \tilde{f}(x)$$

összefüggésekkel számíthatók.

Ekkor, ha a $\Delta h(x)$ kezdeti hézag változást az egyik elem falvastagságának változtatásával érjük el, akkor

$$\Delta h(x) = b_k - b, \quad (2.27)$$

azaz a Δh , a kezdeti falvastagság és az optimálásnál kialakuló falvastagság különbségeként áll elő.

A fentieket figyelembe véve, a (2.26) helyett — feltételezve, hogy a 2-es jelű test falvastagságát változtatjuk meg — a relatív rés értékére a

$$g_0(x) = \int_{\Omega'_{\text{opt}}} H_k(x, x') p(x') dS' + f_k^2(x) - f_k^1(x) + h_k(x) \\ + b_k^2(x) - b^2(x) - d(x) \\ + \int_{\Omega'_{\text{opt}}} \frac{\partial H^2(x, x')}{\partial b^2(x)} \Big|_k (b_k^2(x) - b^2(x) + b_k^2(x') - b^2(x')) p(x') dS'$$

$$+ \frac{\partial f^2(x)}{\partial b^2(x)} \Big|_k (b_k^2(x) - b^2(x)) = 0 \quad (2.28)$$

kifejezést írhatjuk. Az érintkezési feladat iterációs úton történő megoldásának felépítése azonos a fentiekben javasolttal.

2.5 További optimalizációs problémák

2.5.1 Vezérelt kezdeti hézag változással kapcsolatos optimalizációs feladat.

Gyakran az érintkezési nyomás maximumának minimálását, gyártástechnológiai szempontokat is figyelembe véve, a peremváltoztatás mértékének vezérlésével biztosítják [7]. Ekkor a programozási feladat

$$\begin{aligned} \min \{ & p_{\max} \mid \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}; p_{\max} - p(x) \geq 0, \\ & p(x) \geq 0, g_0(x) \geq 0, v^+(x)\Delta^+ - \Delta h(x) \geq 0, \\ & -v^-(x)\Delta^- + \Delta h(x) \geq 0, x \in \Omega_{\text{opt}} \}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

ahol $\Delta^+ > 0$ és $\Delta^- < 0$ a peremváltoztatás maximumainak adott értékei.

Mivel a $p(x) g_0(x) = 0 \quad x \in \Omega_{\text{opt}}$ feltétel nincs ellenőrizve, ezért a diszkrétizálás után kapott véges dimenziójú lineáris programozási feladat megoldását ellenőrizni kell ennek a feltételnek a szempontjából is. A megoldást a következő lépések révén kapjuk meg [7]: Először is megoldjuk az érintkezési feladatot, amely kijelöli az Ω_p^1 és az Ω_0^1 tartományokat, majd fixálva az Ω_p^1 és Ω_0^1 tartományokat, az Ω_p^1 felett minimáljuk a p nyomást. A lineáris programozási feladat megoldásakor természetesen előfordulhat az, hogy az Ω_p^1 tartomány j jelű pontjában $g_0 > 0$ lesz, illetve az Ω_0^1 tartomány i jelű helyén p_i pozitívrá adódik. Ekkor a következő lineáris programozási feladat megoldásához az Ω_p^1 -be bevesszük az Ω_p^1 i jelű pontját, illetve az Ω_p^2 -be az Ω_p^1 j jelű pontját. Ismételten megoldjuk a lineáris programozási feladatot. A fenti iterációt mindaddig folytatjuk, míg a p_{\max} vagy az Ω_p tartomány azonos nem lesz az előző iterációban kapott értékkel. A [7]-ben tartóra, illetve csap- és hüvelyfeladatra bemutatott példák az iteráció gyors konvergenciájáról tanúskodnak.

2.5.2 Az érintkezési nyomás részleges vezérlésével kapcsolatos optimalizációs feladat. Az előző pontokban felállított feladatok esetében az Ω_{opt} tartomány egésze felett vezéreltük az érintkezési nyomást. Elképzelhető olyan eset is (pl. hengergörgők lekerekítésének meghatározásakor), amikor az Ω_{opt} tartomány Ω_v résztartományán hajtjuk végre a $p(x)$ vezérlését a $g_0(x) = 0$ geometriai feltétel mellett (a terhelésből, a geometriai kialakításból következik, hogy a p_{\max} ezen a tartományon jelenik meg), míg a megmaradó $\Omega_{\text{opt}} - \Omega_v = \Omega_{nv}$ részen $g_0(x) \geq 0$ -t tételezünk fel, továbbá feltételezzük azt, hogy itt a kezdeti rés megváltozása adott függvényen keresztül van kapcsolatban az Ω_v -n kialakuló $h(x)$ -el.

Jelölje az $x \in \Omega_v$ -n kialakuló kezdeti rés megváltozását $\Delta h_v(x)$, míg az $x \in \Omega_{nv}$ tartományon legyen a rés megváltozása $\Delta h_{nv}(x)$. Feltételezésünk értelmében $\Delta h_{nv}(x) = f(\Delta h_v(x))$.

Ekkor a (2.23) feladat helyett a

$$\begin{aligned} \min \{p_{\max} \mid \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}; p(x) \geq 0, \\ g_0(x) = 0, v(x) p_{\max} - p(x) \geq 0, x \in \Omega_v, \\ g_0(x) \geq 0, \Delta h_{nv}(x) = f(\Delta h_v(x)) \quad x \in \Omega_{nv}\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

feladat fogalmazható meg.

Mivel az Ω_{nv} tartományon a $p(x) g_0(x) = 0$ feltétel nincs ellenőrizve, ezért az optimalizációs feladatot az előző alponthan ismertetett iteráció segítségével oldhatjuk meg.

2.5.3 Az érintkezési feszültség maximumának minimálása a súrlódási teljesítményvesztés figyelembevételével. Az érintkezési nyomás integrálja az Ω_{opt} tartomány feletti N „normál erőt” szolgáltatja:

$$N = \int_{\Omega_{\text{opt}}} p \, dS_1^{\dagger}. \quad (2.31)$$

Amennyiben síkbeli testeket vizsgálunk, és azok elcsúsznak egymáson (minthogy súrlódás nélküli érintkezési feladatot számolunk, az elcsúszás a testet jellemző síkra merőlegesen történik), úgy a fellépő súrlódóerő arányos az N erővel. Adott s csúszási sebesség esetében

$$P = s \int_{\Omega_{\text{opt}}} p \, dS \stackrel{\text{def}}{=} N\Theta \quad (2.32)$$

teljesítményvesztés jön létre.

A min p_{\max} meghatározásakor egyrészt eljárhatunk úgy, hogy megköveteljük a fellépő teljesítményvesztéstől annak adott értéken való alulmaradását, azaz

$$P_{\text{adott}} - \Theta N \geq 0, \quad (2.33)$$

másrészt a célfüggvényt

$$p_{\max} + \psi N \quad (2.34)$$

alakban állítjuk elő, vagyis a ψ értékének felvételével szabályozzuk közvetve a veszteség súlyát.

Az első esetben a lineáris programozási feladat az alábbi:

$$\begin{aligned} \min \{p_{\max} \mid \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}; p(x) \geq 0, \\ v(x) p_{\max} - p(x) \geq 0, g_0(x) = 0 \quad x \in \Omega_{\text{opt}}, \\ P_{\text{adott}} - \Theta N \geq 0\}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

míg a második esetben:

$$\min \left\{ p_{\max} + \psi \int_{\Omega_{\text{opt}}} p \, dS \mid \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}; p(x) \geq 0, \right. \\ \left. g_0(x) = 0, v(x) p_{\max} - p(x) \geq 0 \quad x \in \Omega_{\text{opt}} \right\}. \quad (2.36)$$

Vizsgáljuk meg, hogy a (2.36) alatti feladatnak van-e mindig értelme. Ezzel kapcsolatban áll a következő tétel:

Tétel-9: Amennyiben az érintkezési feladatban az \mathbf{n}^1 kitüntetett irány $\mathbf{n}^1(x) = \mathbf{e}_z$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$, úgy a merevtestszerű mozgást végző testre vonatkozó (2.1) egyensúlyi egyenlet értelmében

$$\int_{\Omega_{\text{opt}}} p \, dS = F_0 = \text{adott},$$

következésképpen a (2.36) alatti feladatnak csak $\psi = 0$ esetében van értelme, illetve amennyiben

$$P_{\text{adott}} < \Theta \int_{\Omega_{\text{opt}}} p \, dS = \Theta F_0,$$

úgy a (2.33) nem áll fenn, vagyis a (2.35) feladatnak nincs megoldása.

Tétel-10: Amennyiben $\mathbf{n}^1(x) \neq \mathbf{e}_z$ $x \in \Omega_{\text{opt}}$, akkor a szóban forgó egyensúlyi egyenlet

$$F_0 - \mathbf{e}_z \cdot \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{n}^1 p \, dS = 0,$$

alakú, és mivel $0 < \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}^1 \leq 1$, ezért

$$F_0 - \int_{\Omega_{\text{opt}}} p \, dS < 0,$$

következésképp a (2.36) feladat felállításának van értelme.

Tétel-11: Amennyiben az érintkezésben álló testek közül az egyik test a másikhoz képest merevtestszerűen elfordulhat, úgy a (2.2) egyensúlyi egyenlet értelmében

$$\mathbf{M}_0 - \int_{\Omega_{\text{opt}}} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 p \, dS = \mathbf{0},$$

és így a (2.36) feladat felállításának van értelme, hiszen az

$$\int_{\Omega_{\text{opt}}} p \, dS$$

integrálnak nincs előre lerögzített értéke.

Tétel-12: Amennyiben az érintkezésben álló testek egymáshoz képest merevtestszerűen eltolódnak és elfordulnak, úgy a kitüntetett irányra vonatkozó $\mathbf{n}^1(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_z$ $\mathbf{x} \in \Omega_{\text{opt}}$ feltétel teljesülésekor a Tétel-9 értelmében a (2.36) alatti optimálási feladatnak csak $\psi = 0$ esetében van értelme.

2.5.4 A csúsztató feszültség maximumának minimálásával kapcsolatos optimálási feladat. A golyós, görgős csapágyak élettartamának szempontjából kedvezőtlen az érintkezési tartomány alatti pontokban kialakuló, — a golyónak vagy görgőnek a pályán történő legördülésével párosuló — váltakozó előjelű csúsztató feszültség. A maximális csúsztató feszültség csökkentése az élettartam növekedését eredményezi. A szerkezet működéséből adódóan mindig ki lehet jelölni a test olyan

$$V_{\tau}^e \quad (e = 1, 2)$$

tartományát, ahol a csúsztató feszültség maximális. Ily módon az alábbi optimálási feladatot fogalmazhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \min \{ \tau_{\max} \mid \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}; p \geq 0, \\ g_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\text{opt}}; \tau_{\max} - \int_{\Omega'_{\text{opt}}} T^e(\mathbf{x}, \mathbf{x}') p(\mathbf{x}') dS' \geq 0 \\ \mathbf{x} \in V_{\tau}^e, e = 1, 2 \} \end{aligned} \quad (2.37)$$

ahol $T^e(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ — a τ feszültségekhez tartozó hatásfüggvény az e jelű test vonatkozásában.

A $p(\mathbf{x})$ vezérlésének biztosításakor a (2.14) mellékfeltételt is számításba kell venni. Ebben az esetben az optimális kialakítást a

$$\begin{aligned} \min \{ \tau_{\max} + \gamma p_{\max} \mid \mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}; p(\mathbf{x}) \geq 0, \\ v(\mathbf{x}) p_{\max} - p(\mathbf{x}) \geq 0, g_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\text{op}}; \\ \tau_{\max} - \int_{\Omega'_{\text{opt}}} T^e(\mathbf{x}, \mathbf{x}') p(\mathbf{x}') dS' \geq 0 \quad \mathbf{x} \in V_{\tau}^e, e = 1, 2 \} \end{aligned} \quad (2.38)$$

feladat megoldása révén határozhatjuk meg.

A (2.37), (2.38) feladatok megoldásának konkrét számításakor a V_{τ}^e tartományban a τ csúsztatófeszültség „feltérképezése” miatt a számítási idő több, mint azon feladatoké, amelyekben a mellékfeltételek csak az $\mathbf{x} \in \Omega_{\text{opt}}$ tartományra vonatkoznak.

3. A (2.12) programozási feladat megoldása

A feladat közelítő megoldását választva, az ismeretlen lefutású $p(\mathbf{x})$ nyomásfüggvényt a végelelemes módszer alapján

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^*(\mathbf{x}) \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\text{opt}} \quad (3.1)$$

alakban közelítjük meg. Itt $\mathbf{P}^*(x)$ — az approximációs sorvektor, \mathbf{p} — az érintkezési nyomás diszkrét pontbeli értékét tartalmazó vektor (fizikai tartalma a $\mathbf{P}^*(x)$ -ben használatos $P_i(x)$ koordinátafüggvények felvételétől függ [3]). A (3.1)-nek (2.11)-be, illetve (2.1), (2.2)-be történő behelyettesítése, majd a kijelölt integrálások elvégzése után formailag a módosított kiegészítő energia

$$\tilde{N}_c \Rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{p}^* \mathbf{H} \mathbf{p} - \mathbf{p}^* \mathbf{t}, \quad (3.2)$$

illetve az egyensúlyi egyenletek

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{array} \right] \Rightarrow \mathbf{G}^* \mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

alakúak, amiből a (2.10) alatti variálási feltételeket figyelembe véve, a

$$\delta_p L \Rightarrow \delta \mathbf{p}^* \frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}} = \delta \mathbf{p}^* (\mathbf{H} \mathbf{p} - \mathbf{t} - \mathbf{G} \lambda) \equiv \delta \mathbf{p}^* \mathbf{g} \geq 0 \quad (3.4)$$

$$\delta_{\lambda, \mathbf{F}, \mathbf{M}} L \Rightarrow \delta \lambda^* \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \delta \lambda^* (\mathbf{G}^* \mathbf{p} - \mathbf{q}) = 0 \quad (3.5)$$

összefüggések következnek.

A (3.4) egyenlőtlenségből $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ mellett $\delta \mathbf{p}^* > \mathbf{0}$ -nál $\mathbf{g} \geq \mathbf{0}$, míg ha a $\delta \mathbf{p}^*$ tetszőleges, akkor $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ adódik. Ily módon a \mathbf{g} -t általánosított rés vektornak lehet tekinteni. A (3.4)-ből egyenest a

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{g} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p}^* \mathbf{g} = 0 \quad (3.6a-c)$$

következik. Ezáltal a (2.12) helyett az érintkezési feladat megoldását a

$$\min \{ \mathbf{p}^* \mathbf{g} \mid \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{g} = -\mathbf{G} \lambda + \mathbf{H} \mathbf{p} - \mathbf{t} \geq \mathbf{0}, \mathbf{G}^* \mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{0} \} \quad (3.7)$$

kvadratikusan programozási feladat megoldásán keresztül kapjuk meg.

Látható, hogy a (2.5)–(2.6) feltételeket a (3.6) alattiakkal helyettesítettük. Ez alapján a kontakt nyomás munkája zérus a $g(x)$ rés „elmozduláson”, azaz az

$$\int_{\Omega_i} P_i(x) g(x) dx$$

integrál értéke zérus, ha $p_i > 0$, és megfordítva, zérustól különböző, ha $p_i = 0$. Itt Ω_i az Ω tartomány azon altartománya, ahol $P_i(x)$ zérustól eltérő értékű.

A (3.7) megoldására a szokásos eljárások egyikét alkalmazhatjuk [10].

4. A (2.23) alatti optimálási probléma megoldása

A feladatot ismételten végesdimenziójú programozási feladatra kívánjuk visszavezetni. E célból az érintkezési nyomást a (3.1) szerint, míg a kezdeti rés megváltozását a

$$\Delta h(x) = \mathbf{h}^*(x)\Delta \quad x \in \Omega_{\text{opt}} \quad (4.1)$$

alakban közelítjük meg. Attól függően, hogy a (4.1) alatti $\mathbf{h}(x)$ -t lokális vagy globális approximáció alapján építjük fel, a Δ diszkrét pontbeli résváltozásokat tartalmaz, illetve fizikai tartalmat nem kölcsönző állandókból összeállított vektornak felel meg.

A (2.21), (2.22) diszkrétizálásának két útját különböztethetjük meg:

1. A súlyozott maradékok módszerét alkalmazzuk.
2. A kollokációs módszert alkalmazzuk (diszkrét pontokban ellenőrizzük).

Az 1. esetben az

$$\int_{\Omega_{\text{opt}}} g_0(x) P_i(x) dx, \quad \int_{\Omega_{\text{opt}}} \chi(x) P_i(x) dx \\ (i = 1, \dots, k)$$

integrálokat határozzuk meg. Ekkor formálisan a

$$g_0(x) \Rightarrow \mathbf{H}_k \mathbf{p} - \mathbf{t}_k - \mathbf{G}\lambda + \mathbf{R}\Delta = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

$$\chi(x) \Rightarrow p_{\max} \mathbf{v} - \mathbf{Q}\mathbf{p} \geq \mathbf{0} \quad (4.3)$$

egyenlet-egyenlőtlenséghez jutunk, ahol \mathbf{H}_k és \mathbf{G} az $\Omega = \Omega_{\text{opt}}$ esetében azonos a (3.7)-ben szereplőkkel.

A 2. esetben $i = 1, \dots, k$ számú pontokban felírva a $g_0(x)$ -t és a $\chi(x)$ -et, formálisan a

$$g_0(x) \Rightarrow \mathbf{H}_k^k \mathbf{p} - \mathbf{t}_k^k - \mathbf{G}^k \lambda + \mathbf{R}^k \Delta = \mathbf{0}, \quad (4.4)$$

$$\chi(x) \Rightarrow p_{\max} \mathbf{v}^k - \mathbf{Q}^k \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \quad (4.5)$$

diszkrétizált alakokhoz jutunk.

Megjegyzés-8: Ha a $\Delta h(x)$ -et és a $p(x)$ -et altartományonként (elemenként) állandó értékű approximációs függvénnyel approximáljuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{Q}^k = \mathbf{R}^k = \mathbf{E}_{(k,k)} \quad \text{egységmátrix.}$$

Megjegyzés-9: Egyszerűsítés céljából a továbbiakban nem teszünk különbséget a \mathbf{H}^k , \mathbf{H}_k^k stb. mennyiségek jelölése között.

Megjegyzés-10: Mivel a merevtestszerű elmozdulásból származó tag ($-\mathbf{G}\lambda$) és a kezdeti rés változásától függő tag ($\mathbf{R}\Delta$), mértékegységeket tekintve mm,

ezért az ismeretlenek számának csökkentése céljából célszerű ezek összegét használni a programozási feladatban:

$$I = -G\lambda + R\Delta, \quad (4.6)$$

majd a programozási feladatban szereplő p_{\max} , p , I meghatározása után az alábbi megfontolásból meghatározni a λ és a Δ értékeket.

Az 1-es test merevtestszerű mozgásának I szabadságfoka esetén I számú pontban a kezdeti hézag megváltozását zérusnak írjuk elő. A (4.6) egyenletet felhasználva, az

$$\begin{aligned} l_1 &= -\tilde{G}(x_1)\lambda, \\ &\vdots \\ l_I &= -\tilde{G}(x_I)\lambda \end{aligned}$$

egyenletrendszerből a merevtestszerű elmozdulás vektora

$$\lambda = \left[\begin{array}{c} \tilde{G}(x_1) \\ \vdots \\ \tilde{G}(x_I) \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} l_1 \\ \vdots \\ l_I \end{array} \right], \quad (4.7)$$

és így az

$$R\Delta = I + G\lambda$$

meghatározható, ahonnan az R kvadratikus mátrix inverzének ismeretében a Δ kiszámolható. ($h^*(x) = P^*(x)$ esetében R pozitív definit.) A Δ ismeretében az 1-es test megváltozott peremének helykoordinátája:

$$R^{opt}(x) \equiv R^{kezdeti}(x) - h^*(x)\Delta. \quad (4.8)$$

Ezek után a Megjegyzés-10 figyelembevételével írjuk fel a (2.23) alatti optimalizációs feladat diszkrétizált alakját:

$$\begin{aligned} \min \{ p_{\max} \mid p \geq 0, G^*p - q = 0, H_k p - t_k + I = 0, \\ v p_{\max} - Qp \geq 0 \} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Megjegyzés-11: Amennyiben az 1-es test e_z irányú merevtestszerű eltolódással, vagy y tengelykörüli elfordulással rendelkezik, úgy a Tétel-1, -2, vagy Tétel-5, -6 értelmében $\chi(x) \equiv 0$, vagyis a (4.9) alatti programozási feladatban 1 db egyensúlyi egyenlet, k db érintkezési geometriai egyenlet és k db vezérléssel kapcsolatos egyenlet írható fel a p_{\max} és a $(k, 1)$ típusú p és I vektorok meghatározására. Ily módon lineáris, inhomogén algebrai egyenletrendszer megoldásán keresztül tisztázható az optimálási feladat.

Megjegyzés-12: A (4.9)-ben az \mathbf{l} vektor elemei tetszőleges előjelűek lehetnek. Így a feladat konkrét kiszámításakor az $\mathbf{l} = \mathbf{l}^+ - \mathbf{l}^-$, $\mathbf{l}^+ \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{l}^- \geq \mathbf{0}$ transzformációt hajtjuk végre.

Megjegyzés-13: Amennyiben a (2.23) alatti programozási feladatban $g_0(x)$ -et a (2.26) vagy (2.28) alapján számítjuk, úgy a feladat diszkretizálásakor a (2.24), (2.25) alattiakat is diszkretizálni kell.

Így formailag (2.26)-ból kollokációs diszkretizálásakor (a (4.2)-höz hasonlóan) a

$$g_0(x) \Rightarrow \mathbf{H}_k \mathbf{p} - \mathbf{t}_k - \mathbf{G}\lambda + \left(\mathbf{R} + \mathbf{D}(\mathbf{p}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{h}} \right) \Delta = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

kifejezéshez jutunk, mivel az

$$\int_{\Omega'_{\text{opt}}} \frac{\partial H(x, x')}{\partial \mathbf{h}(x)} (\Delta \mathbf{h}(x) + \Delta \mathbf{h}(x')) p(x') dS' \Rightarrow$$

integrál a

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\partial H_{11}}{\partial h_1} 2\Delta_1 & \frac{\partial H_{12}}{\partial h_1} (\Delta_1 + \Delta_2) & \dots \\ \frac{\partial H_{21}}{\partial h_2} (\Delta_2 + \Delta_1) & 2 \frac{\partial H_{22}}{\partial h_2} \Delta_2 & \\ \vdots & & \end{bmatrix} \mathbf{p} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial H_{11}}{\partial h_1} p_1 & \left(\frac{\partial H_{12}}{\partial h_1} + \frac{\partial H_{21}}{\partial h_2} \right) p_2 & \dots \\ \vdots & & \end{bmatrix} \Delta = \mathbf{D}(\mathbf{p}) \Delta \end{aligned}$$

diszkretizált alakot nyeri a

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{h}} \bigg|_{(x_i, x_j)} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial \mathbf{h}}$$

jelölések felhasználásával.

Itt \mathbf{h} és Δ diszkrét pontbeli hézag, ill. hézagváltozás értékekből összeállított vektorok. A $g_0(x)$ -nek a (4.10)-alatti felírása összhangban van a (2.26)-nál elmondott iterációval, amennyiben a \mathbf{D} -ben szereplő \mathbf{p} -t az előző iterációból vesszük.

Megjegyzés-14: Amennyiben az érintkezésben álló testek érintkezési feladatakor a testekben kialakuló elmozdulásmezőt a végeselemes elmozdulás módszerrel határozzuk meg, úgy a \mathbf{H} , az \mathbf{f} a $\partial \mathbf{H} / \partial \mathbf{h}$ és a $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{h}$ előállítását a Függelék szerint végezhetjük el.

5. Az érintkezésben álló szerkezeti elemek kopásának hatása az érintkezési feladat megoldására

A kopás előrehaladtával a testek közötti „kezdeti hézag” változik, és ezért a kialakuló feszültségállapot, valamint a testek közeledése is eltér a kopás megkezdésekor kapott értékektől. A tervező, üzemeltető mérnök számára érdekes lehet a kopás hatásának vizsgálata.

Tételezzük fel, hogy a vizsgált síkbeli testek egymáshoz képest síkjukra merőleges irányban elcsúsznak. Ekkor a [11]-ben használatos hipotézis szerint az x helyen keletkező kopás az

$$\int_0^t \tilde{K}s(x, \tau) p(x, \tau) d\tau \quad (5.1)$$

integrál segítségével számítható, ahol \tilde{K} az anyagtól, a felületminőségétől, a testek közötti súrlódási tényezőtől függő állandó, $s(x, \tau)$ a testek x pontbeli relatív sebessége, $p(x)$ az érintkezési nyomás.

A (2.1)–(2.4) és az (5.1) alapján az

$$F = 0, M = 0 \quad (5.2a, b)$$

$$g(x) = \int_{\Omega'} H(x, x') p(x') dS' + f^2(x) - f^1(x) + h_k(x) - d(x) + \int_0^t \tilde{K}s(x, \tau) p(x, \tau) d\tau \geq 0, \quad (5.3)$$

$$p(x) g(x) = 0, p(x) \geq 0 \quad x \in \Omega \quad (5.4a, b)$$

egyenlet-egyenlőtlenségi rendszer megoldása jelenti a kopáskor jelentkező érintkezési feladat megoldását.

Az érintkezési nyomást

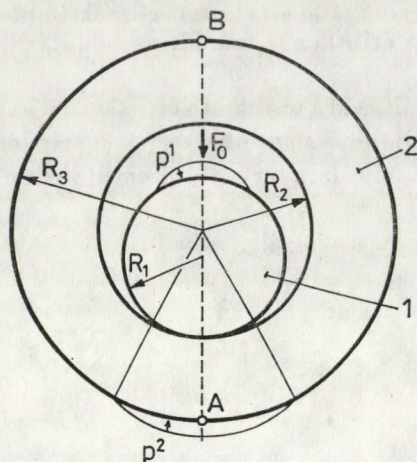
$$p(x, t) = P^*(x) p(t) \quad (5.5)$$

alakban közelítjük meg. Az időbeli diszkretizáláskor $\Delta\tau$ időlépés intervallumban állandó érintkezési nyomást tételezünk fel. Ekkor az $i = j-1$ -edik időpillanatot (időintervallumot) követő j -edik időintervallumbeli állapotot a

$$\min \left\{ p_j^* g_j \mid p_j \geq 0, g_j = -G\lambda_j + H p_j - t + \sum_{s=1}^{j-1} K p_s \geq 0, G^* p_j - q = 0 \right\} \quad (5.6)$$

programozási feladat megoldása szolgáltatja, ahol az

$$\int_0^t \tilde{K}s(x, \tau) p(x, \tau) d\tau \Rightarrow \sum_{i=0}^{j-1} \tilde{K}s_i(x) \Delta\tau_i p_i(x)$$



5. ábra. Síkbeli — tárcsa és körgyűrű alakú — testek érintkezési feladata

kifejezés térbeli diszkretizálásából nyerjük az (5.6) alatti szummációs kifejezést. Itt $p_i(x)$, $w_i(x)$ a $\Delta\tau_i$ időintervallumbeli érintkezési nyomás, illetve sebesség értéke.

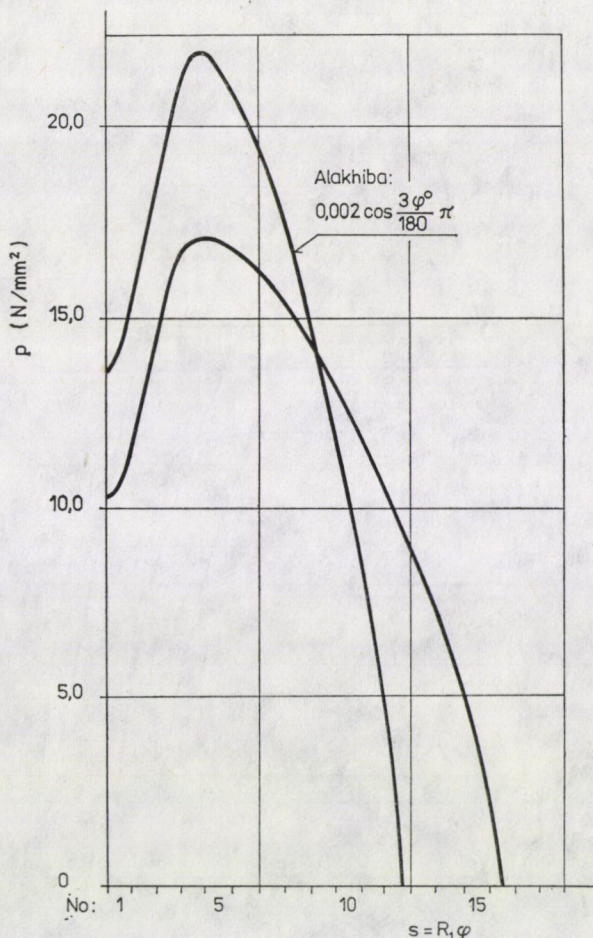
Látható, hogy a kopás a $\Delta\tau_i$ időintervallumban kialakuló nyomás értékével egyenes arányban változik. A \tilde{K} értékét kísérletekből ismerve, az (5.6) feladatot időlépésként megoldva követhetővé válik a kopás befolyása az Ω_p érintkezési tartomány és a $p(x, \tau)$ nyomás függvény alakulására.

6. Példák

6.1 A fentiek illusztrálására vizsgáljuk az 5. ábrán vázolt általánosított síkfeszültségi állapotban levő 1-es jelű kör alakú és a 2-es jelű körgyűrű alakú tárcsák normál érintkezési feladatát. Feltételezzük, hogy a 2-es jelű test A pontjának elmozdulása zérus, a terhelés pedig az ábrán vázolt módon az A , B pontokat összekötő tengelyre szimmetrikusan oszlik meg. Eredőjük a szóban forgó tengely irányába mutat. A megoszlóterhelés p^1 és p^2 sűrűségének értékei, az érintkezési feladat megoldásával tisztázott Ω_p tartomány felett megoszló p érintkezési nyomásból, a testekre felírható egyensúlyi egyenletek kielégítéséből számíthatók.

A testek geometriai méretei: sugarak: $R_1 = 40$ mm, $R_2 = 40,01425$ mm, $R_3 = 55$ mm; vastagságuk: $V = 20$ mm. Anyaguk azonos, csúsztató rugalmassági tényezőjük: $G = 73575,0$ N/mm², míg Poisson-féle tényezőjük: $\nu = 0,3$. A terhelés függőleges irányú eredője: $F_0 = 10$ kN.

Az érintkezési nyomást $2k$ számú $2\beta \cdot R_i$ ($i = 1, 2$) hosszúságú ívszakasz felett állandó sűrűségű terheléssel helyettesítjük [12].



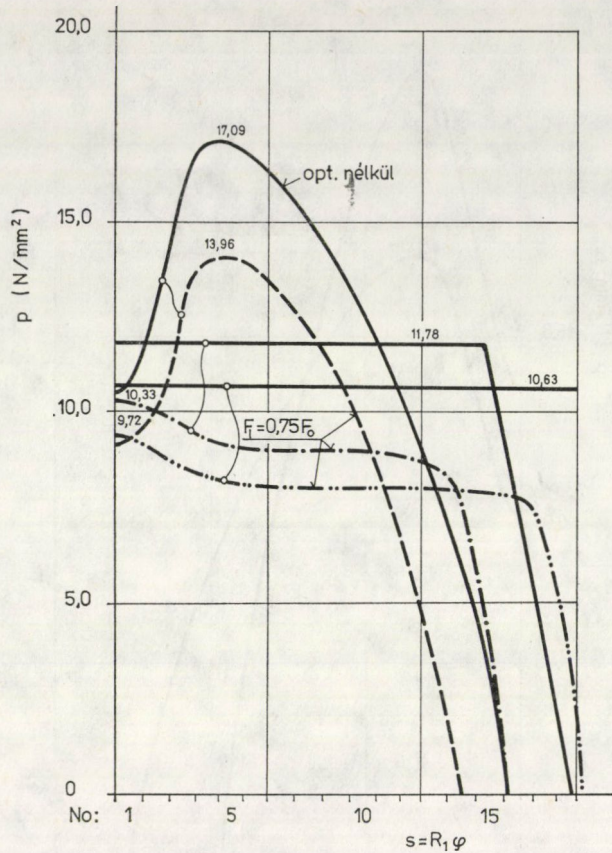
6. ábra. Az érintkezési nyomásfüggvény megoszlása a tárcsa pereme mentén $k = 18$ tartomány felett constans értékű nyomással történő approximációval számolva

6.1.1 Az F_0 terhelés hatására kialakuló érintkezési nyomás megoszlását a 6. ábra 1 jelű görbéje szemlélteti, amely jelentősen eltér a Hertz-elmélete szerint számítottól.

6.1.2 A 6. ábrán a $0,002 \cdot \cos \frac{3\varphi}{180} \pi$ mm alakhibájú R_1 sugárral készített

1-es test esetében kialakuló érintkezési nyomás megoszlását az alakhiba jelű görbe tünteti fel. Látható, hogy 2 μm -es alakhiba a p_{\max} kb. 20%-os növekedését okozta az alakhiba nélküli esetben kapotthoz képest.

6.1.3 Az érintkezési nyomás optimalizálásával kapcsolatosan $k = 18$ db tartomány által kijelölt optimalizációs tartomány esetében a (2.15), (2.16a, b) és a (2.17a, b) alatti vezérlési függvény felvétele mellett oldjuk meg a feladatokat. A C^1 osztályú átmenetnél az $\Omega_{\text{átmenet}}$ -i tartományt $k = 9, 11, 13$ számú



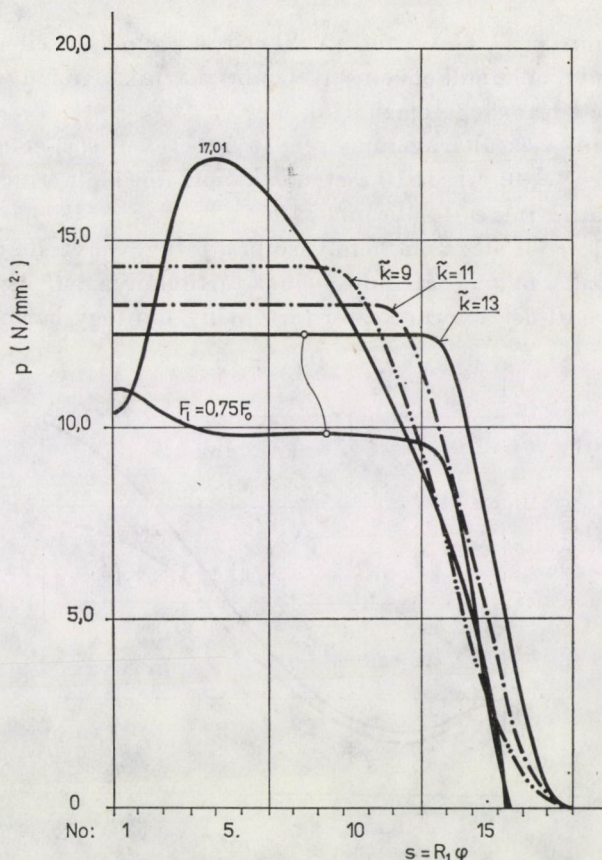
7a. ábra. $k = 18$ altartománnyal kijelölt $\Omega_{\text{opt}}/2$ esetén az optimalizált nyomásfüggvény lefutása állandó és trapéz alakra történő vezérléskor

altartományok által kijelölt L_1 (lásd 3. ábra) tartományi hosszal jelöljük ki: $(k - \tilde{k}) \cdot 2 \beta \cdot R_1$.

Az érintkezési nyomás lefutását, illetve a kezdeti hézag megváltozását a 7. és 8. ábrák tüntetik fel. Látható, hogy a Tétel—5 értelmében a $p(x)$ függvény valóban hozzásimul a $v(x)$ p_{max} burkoló függvényéhez. Az $F_l = 0,75 F_0$ csökkentett terheléskor az F_0 -nál optimalizált alakú nyomáeloszlástól eltérő függvényt kapunk. Ezekben az esetekben az 1-es test merevtestszerű eltolódásából adódóan, a csökkentett terheléshez tartozó p_{max} kisebb lesz, mint az optimalizálnál kapott érték.

Figyelemreméltó, hogy a 8. ábrán vázolt kezdeti hézagváltozások $1 \div 1,5$ μm -es értéke az érintkezési nyomás lényeges változását okozza.

A 9. ábra az Ω_{opt} tartomány hosszának (k altartományok számának) függvényében a p_{max} -ot az $N = V \int_{\Omega_{\text{opt}}} p(x) R d\varphi$ „normál erőt” és az 1-es test középső pontjának függőleges irányú λ_F eltolódását tünteti fel.



7b. ábra. $k = 18$ altartománnyal kijelölt $\Omega_{\text{opt}}/2$ esetében az optimalizált nyomásfüggvény lefutása a C^1 osztályú átmenetet biztosító alakra történő vezérléskor

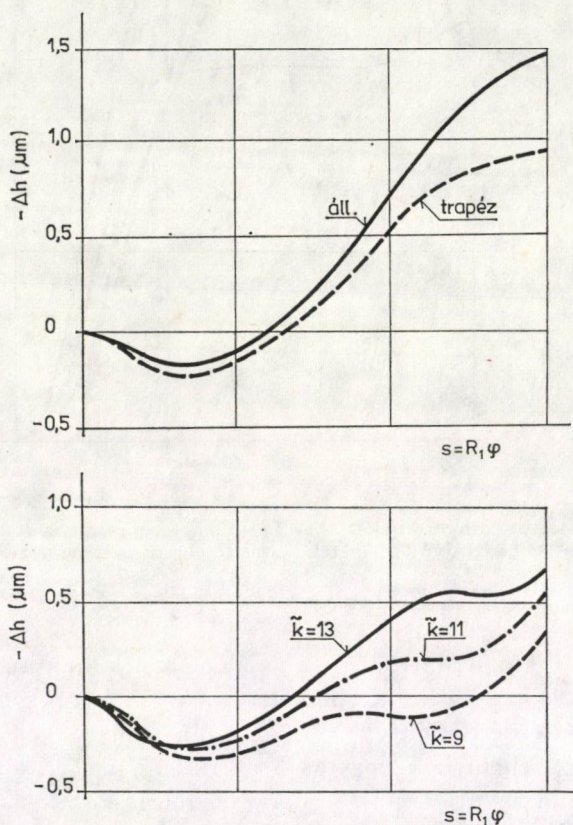
A 9a. ábrán kapott eredmények összhangban állnak a Tétel-1-ben megfogalmazottakkal, vagyis az Ω_{opt} növelésével a p_{max} csökken, és legkisebb a $v(x) = 1$ melletti vezérléskor.

A 9b. ábra görbéi jelzik, hogy az N normálerő az Ω_{opt} növelésével szintén növekszik. Amennyiben a testek síkjukra merőlegesen elcsúsznak egymáson, úgy a fellépő súrlódóerő arányos az N erővel. Tehát, ha a tervező azt a célt tűzi ki, hogy az optimalizáláskor kialakuló N ne legyen nagyobb, mint az optimalizálás nélküli esetben kapott érték, akkor látható, hogy állandó nyomás esetében ezt nem lehet biztosítani. A trapéz alakú nyomáeloszláskor $k \leq 10$ altartománynak megfelelő Ω_{opt} tartomány vehető csak fel. Ugyanakkor, ha megköveteljük a $p_{\text{max, optimált}} \geq p_{\text{max, optimalás nélküli}}$ egyenlőtlenséget, akkor a vizsgált esetben az Ω_{opt} a $9 < k < 11$ számú altartomány által megadott tartományban változhatik csak.

Vagyis a $\min p_{\max}$ illetve $\min N$ cél elérése egymással ellentétes követelmények. Amennyiben mindkét célt figyelembe akarjuk venni, úgy a (2.36) alatti programozási feladatot fogalmazhatjuk meg.

Az általunk vizsgált rugalmas rendszer esetében $v(x)$ -et a (2.17) szerint megválasztva, a $\psi = 0; 0,1; 1; 10$ esetében kapott optimalizált érintkezési nyomás függvényeket láthatjuk a 10. ábrán.

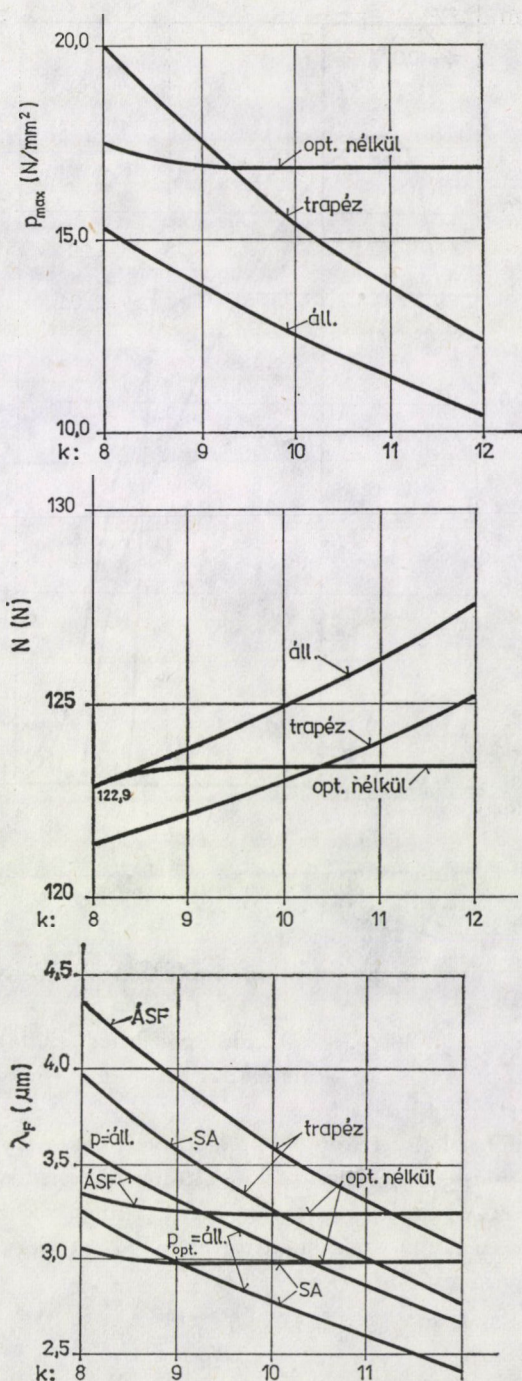
A $\psi = 0,1$ érték még nem befolyásolja a p függvényt, de már $\psi = 1$ -nél, ha nem is változik a nyomás állandóságának tartománya, a C^1 osztályú átmenet megszűnik. $\psi = 10$ -nél az érintkezési tartomány mintegy harmadára csökken



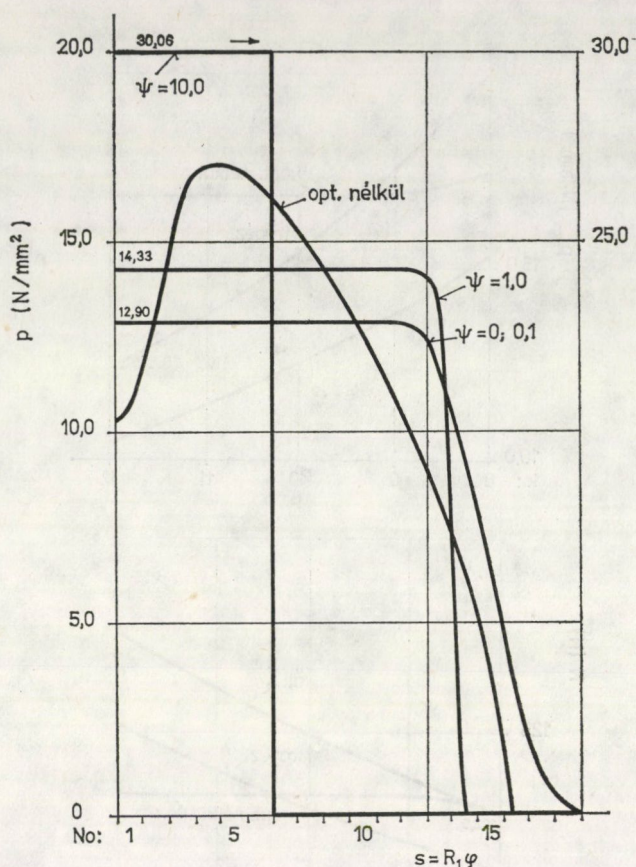
8. ábra. Optimalizált érintkezési nyomást biztosító Δh kezdeti hézag változások

le, a p_{\max} mintegy 2,34-szeresére növekszik a $\psi = 0$ -nál kapottnak. A súrlódási veszteség csökkenése a p_{\max} nagymértékű növekedéséhez vezet.

6.4 Vizsgáljuk meg az 5. ábrán vázolt szerkezet kopását abban az esetben, ha az 1-es jelű elem a tárcsa síkjára merőlegesen mozdul el állandónak tekinthető $K = 1 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^3/N$ kopási mérték mellett. Az (5.6) alatti $K = \langle K, \dots$,



9. ábra. p_{\max} , N , λ_F változása az Ω_{opt} tartomány méretének (k altartomány számának) függvényében. ASF — általánosított sík feszültségi állapot, SA — sík alakváltozás

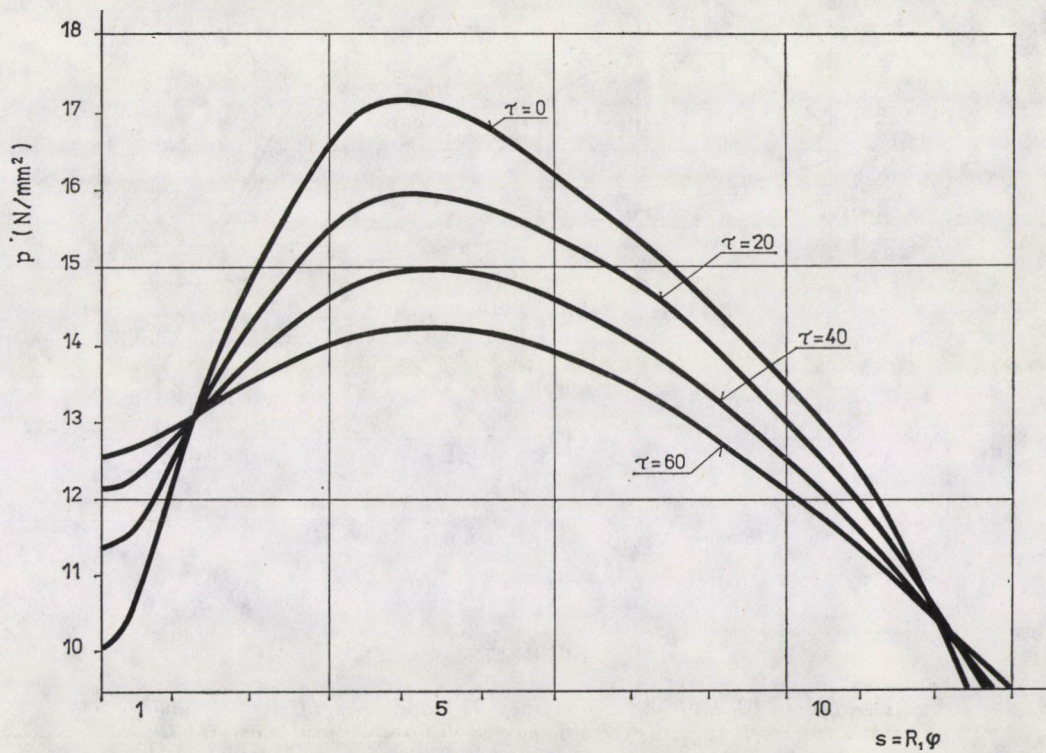


10. ábra. Optimalizálás „kettős” célfüggvénnyel. Az érintkezési nyomás lefutása (2.17) vezérlő függvény esetében $\psi = 0, 0.1, 1, 10$ súlyfaktor mellett

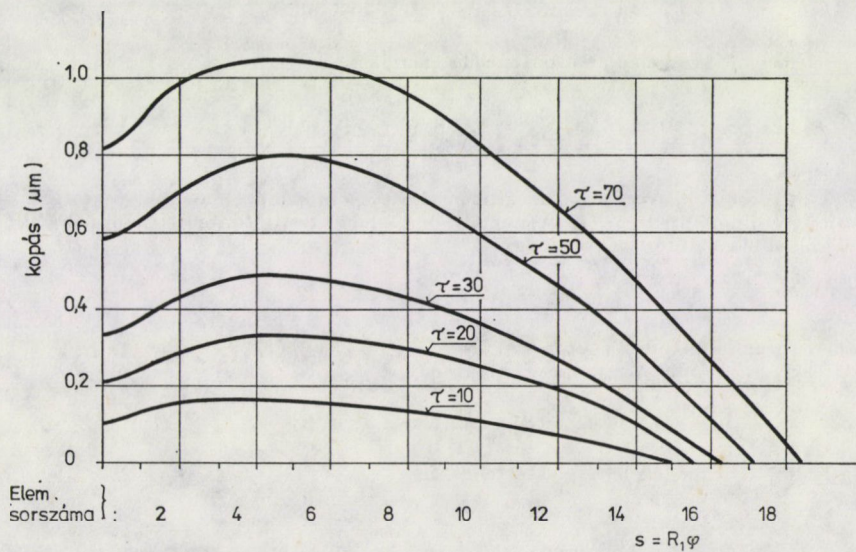
$K >$ diagonál mátrix az elemenként állandónak tekintett p nyomás approximációjából adódóan.

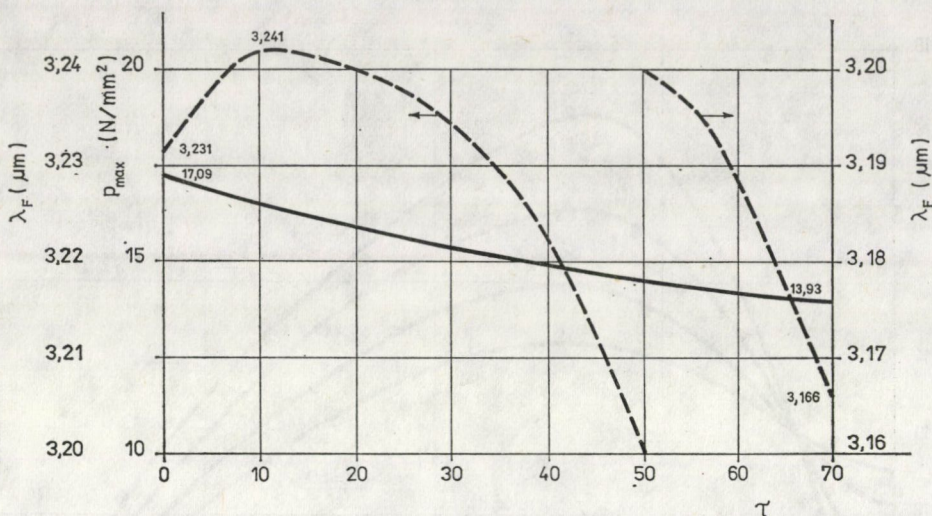
A 11. ábra a $\tau = 0, 20, \dots, 60$ „időlépéseknél” kialakuló nyomáeloszlást, a 12. ábra a kopás mértékét, míg a 13. ábra a p_{\max} maximális nyomást és a λ_F közeledés mértékét tünteti fel.

Figyelemre méltó, hogy $1 \mu\text{m}$ -es kopás az érintkezési nyomás maximumának mintegy 20%-os csökkenéséhez vezet. A kopás növekedésével az érintkezési tartomány, és így az N is kismértékben nő. Az eredmények azt mutatják, hogy a p_{\max} csökkenése százalékos összehasonlításban jóval nagyobb, mint az N -el arányos súrlódási veszteség növekedése.



11. ábra. A kopás hatására kialakuló érintkezési nyomás


 12. ábra. Kopás mértéke τ „időpillanatban”

13. ábra. A p_{\max} , λ_F változása a τ függvényében

FÜGGELÉK

Az érintkezési feladat felállításánál fellépő H hatásmatrix, f ismert elmozdulás vektor és ezek h szerinti deriváltjainak előállításával kapcsolatos kérdések

A potenciális energia minimuma elvet választva, az érintkezési feladat megoldására a programozási feladat az alábbi:

$$\min \{ \Pi \mid u_N^e - u_N^1 + h \geq 0 \}, \quad (F.1)$$

ahol végeselemes módszer alapján a potenciális energia

$$\Pi = \sum_{e=1}^2 \left[\frac{1}{2} u^{e*} S^e u^e - u^{e*} q^e \right]. \quad (F.2)$$

Itt S^e — a merevségi mátrix, u^e — az általánosított csomóponti elmozdulásvektor, q^e — az általánosított csomóponti terhelési vektor, u_N^e — az e jelű test kitüntetett „normális” irányú elmozdulásából összeállított vektor, azaz

$$u_N^e = A^e u^e, \quad (e = 1, 2) \quad (F.3)$$

h — kezdeti hézagból alkotott vektor.

Az (F.1)-hez rendelt Lagrange-féle függvény

$$L = \Pi - p^* (u_N^e - u_N^1 + h), \quad (F.4)$$

amiből a Kuhn—Tucker-féle feltételek értelmében

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial p} \leq 0, \quad p^* \frac{\partial L}{\partial p} = 0 \quad (F.5a-c)$$

következik. Itt p — az érintkezési nyomással kapcsolatos multiplikátor vektor [13].

A további lépéseket az optimalizációs feladat szempontjából vizsgáljuk. A jelölések egyszerűsítése céljából a kezdeti geometriához tartozó mennyiségeknél az alsó k index jelölést elhagyjuk.

I. Tételezzük fel, hogy a kezdeti rést a merevtestszerűen nem mozgó test felületének megváltoztatásával kívánjuk beállítani. Legyen ez a test a 2-es jelű. Ekkor az (F.5a) értelmében

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}^2} = \mathbf{S}^2 \mathbf{u}^2 - \mathbf{q}^2 - \mathbf{A}^{2*} \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (\text{F.6})$$

ahonnan az

$$\mathbf{u}^2 = (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{q}^2 + (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{A}^{2*} \mathbf{p}, \quad (\text{F.6a})$$

illetve az (F.3)-ra való tekintettel, az

$$\mathbf{u}_N^2 = \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{A}^{2*} \mathbf{p} + \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{q}^2,$$

azaz

$$\mathbf{u}_N^2 = \mathbf{H}^2 \mathbf{p} + \mathbf{f}^2, \quad (\text{F.7})$$

ahol \mathbf{H}^2 — a 2-es test hatásmátrixa, \mathbf{f}^2 — az ismert terhelésből származó elmozdulás vektor.

Vegyük az (F.6) \mathbf{h} szerinti deriváltját:

$$\frac{\partial \mathbf{S}^2}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{u}^2 + \mathbf{S}^2 \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \mathbf{h}} - \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial \mathbf{h}} - \frac{\partial \mathbf{A}^{2*}}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{p} - \mathbf{A}^{2*} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{h}} = \mathbf{0},$$

amiből

$$\frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \mathbf{h}} = (\mathbf{S}^2)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{A}^{2*}}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{p} - \frac{\partial \mathbf{S}^2}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{u}^2 + \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{p} + \mathbf{A}^{2*} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{h}} \right).$$

Az (F.3) értelmében

$$\frac{\partial \mathbf{u}_N^2}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{u}^2 + \mathbf{A}^2 \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \mathbf{h}}, \quad (\text{F.9})$$

illetve $\partial \mathbf{u}_N^2 / \partial \mathbf{h}$ értéke az (F.7) alapján

$$\frac{\partial \mathbf{u}_N^2}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial \mathbf{H}^2}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{f}^2}{\partial \mathbf{h}} + \mathbf{H}^2 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{h}}. \quad (\text{F.10})$$

Az (F.9), (F.10) összevetéséből az (F.6a) és az (F.8) figyelembevételével az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_N^2}{\partial \mathbf{h}} - \left(\frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \mathbf{h}} - \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}^2}{\partial \mathbf{h}} \right) ((\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{q}^2 + (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{A}^{2*} \mathbf{p}) + \\ + \mathbf{A}^2 \left((\mathbf{S}^2)^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}^{2*}}{\partial \mathbf{h}} \mathbf{p} \right) + \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial \mathbf{h}} + \mathbf{A}^{2*} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{h}} \right), \end{aligned}$$

azaz

$$\frac{\partial \mathbf{f}^2}{\partial \mathbf{h}} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \mathbf{h}} - \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}^2}{\partial \mathbf{h}} \right) (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{q}^2 + \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial \mathbf{h}}, \quad (\text{F.11})$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}^2}{\partial \mathbf{h}} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial \mathbf{h}} - \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}^2}{\partial \mathbf{h}} \right) (\mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{A}^{2*} + \mathbf{A}^2 (\mathbf{S}^2)^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}^{2*}}{\partial \mathbf{h}}, \quad (\text{F.12})$$

vagyis a \mathbf{H}^2 , \mathbf{f}^2 mennyiségeknek a \mathbf{h} vektor elemei szerint vett deriváltjai az \mathbf{A}^2 , \mathbf{S}^2 mátrixok deriváltjain keresztül fejezhetők ki.

Vizsgálatainkat korlátozzuk vékonyfalú elemekre. Vékonyfalú elemeknél (Kirchhoff—Love hipotézisre épülő héjelméletnél, Bernoulli-féle hipotézisre épülő prizmatikus tartóknál) a merevségi mátrix deriváltjának kiszámítása állandó falvastagság esetében igen egyszerű. Ugyanis ezekben az esetekben a merevségi mátrix

$$\mathbf{S}^2 = (b^3) \mathbf{S}_0^2 \quad (\text{lemezknél, héjaknál}) \quad (\text{F.14})$$

$$\mathbf{S}^2 = \frac{\mathbf{S}_0^2}{(b^3)} \quad (\text{tartóknál}) \quad (\text{F.13})$$

alakban képezhető, ahol b — a lemez, héj vastagsága, a tartó magassága, és így lemezeknél

$$\frac{\partial S^2}{\partial h_i} = \frac{\partial S^2}{\partial b_i} = \frac{\partial S^2}{\partial b} = 3(b)^2 S_0^2 = \frac{3}{b} S^2, \quad (\text{F.15})$$

míg a tartónál

$$\frac{\partial S^2}{\partial h_i} = \frac{\partial S^2}{\partial b_i} = \frac{\partial S^2}{\partial b} = -\frac{3}{b} S^2. \quad (\text{F.16})$$

Amennyiben az Ω tartományon a lemez, héj, tartó szakaszonként (elemenként) állandó, de különböző vastagságú, úgy a fenti deriváltakat elemenként kell venni.

Mivel az A^3 a jelen felállításban „projektor” mátrix (A^2 -ből az u_N^2 kitüntetett irányba eső elmozdulásokat állítja elő), ezért annak deriváltja zérus. (Vékonyfalú elemeknél az u_N^2 -t a középfelület elmozdulásának tekintjük és az érintkezési-elválási feltétel felírásakor vesszük csak figyelembe a falvastagságot a h elemeinek meghatározásakor.) A $\partial q^2/\partial h$ derivált csak akkor különbözik zérustól, ha a testre térfogaton megoszló terhelés vagy hőterhelés hat.

Ily módon vékonyfalú, állandó falvastagságú elemekből felépített rugalmas héjszerkezet esetében a falvastagság megváltoztatásából adódóan a hatásmátrix deriváltja

$$\frac{\partial H^2}{\partial b} = -A^2 [(S^2)^{-1} S^2 (S^2)^{-1} A^{2*} \frac{3}{b} = -\frac{3}{b} H^2, \quad (\text{F.17})$$

míg prizmatikus tartóknál

$$\frac{\partial H^2}{\partial b} = \frac{3}{b} H^2. \quad (\text{F.18})$$

2. Térjünk át arra az esetre, amikor a kezdeti hézag változásából adódó geometriai változtatást az 1-es jelű, merevtestszerű mozgást végző testen kívánjuk végrehajtani.

A [13] munka eredményeit felhasználva írhatjuk, hogy az érintkezést-elválást kifejező geometriai egyenlőtlenség

$$y^{(0)} = H p - G u_I^1 - t = 0, \quad (\text{F.19})$$

ahol

$$\begin{aligned} H &= H^1 + H^2, \quad H^1 = A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-2} A_{II}^{1*}, \\ H^2 &= A^2 (S^2)^{-1} A^{2*} \text{ — a hatásmátrixok,} \\ G &= A_I^1 - A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} S_{21} \text{ — a geometriai mátrix,} \\ t &= f^1 - f^2 - h \text{ az ismert terhelésből, kezdeti} \\ &\quad \text{geometriából származó vektor,} \\ f^1 &= A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} q_{II}^1, \quad f^2 = A^2 (S^2)^{-1} q^2. \end{aligned}$$

Itt S_{22}^1 az 1-es jelű test merevségi mátrixának invertálható része, A_{II}^1 az S_{22}^1 mátrixot szorozó elmozdulásokhoz tartozó A^1 „projektor” mátrix része, u_I^1 a merevtestszerű mozgást biztosító elmozdulásvektor, q a terhelési vektor.

Jelen esetben a normálirányú elmozdulásvektor

$$u_N^1 = A_I^1 u_I^1 + A_{II}^1 u_{II}^1. \quad (\text{F.20})$$

Az

$$L = \Pi - p^* (A^2 u^2 - A^1 u^1 + h) \quad (\text{F.21})$$

Lagrange-féle függvényből a már használt (F.5a) feltételből az

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} u_I^1 \\ u_{II}^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_I^1 \\ q_{II}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_I^1 \\ A_{II}^1 \end{bmatrix}^1 p = 0 \quad (\text{F.22})$$

egyenlethez jutunk.

Az (F.20) egyenletet h szerint deriválva, majd az (F.22)-ből az u_{II}^1 elmozdulást kifejezve, illetve annak deriváltját véve, behelyettesítés és rendezés után az

$$u_N^1 = H^1 p + G u_I^1 + f^1 \quad (\text{F.23})$$

egyenletre is tekintettel, a

$$\frac{\partial u_i^1}{\partial h} = - \frac{\partial H^1}{\partial h} p + \frac{\partial G}{\partial h} u_i^1 + \frac{\partial f^1}{\partial h} - H^1 \frac{\partial p}{\partial h} + G \frac{\partial u_i^1}{\partial h}$$

kifejezés adódik, ahol a H^1 hatásmátrix deriváltja

$$\frac{\partial H^1}{\partial h} = A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial A_{II}^{1*}}{\partial h} + \frac{\partial A_{II}^1}{\partial h} (S_{22}^1)^{-1} A_{II}^{1*} - A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial S_{22}^1}{\partial h} (S_{22}^1)^{-1} A_{II}^{1*}, \quad (F.24)$$

a geometriai mátrix deriváltja pedig

$$\frac{\partial G}{\partial h} = \frac{\partial A_I^1}{\partial h} - \frac{\partial A_{II}^1}{\partial h} (S_{22}^1)^{-1} S_{21}^1 + A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial S_{22}^1}{\partial h} (S_{22}^1)^{-1} S_{21}^1 - A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial S_{21}^1}{\partial h}, \quad (F.25)$$

végezetül az ismert f^1 elmozdulás deriváltja

$$\frac{\partial f^1}{\partial h} = A^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial q_1^1}{\partial h} + \left(\frac{\partial A_{II}^1}{\partial h} - A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial S_{22}^1}{\partial h} \right) (S_{22}^1)^{-1} q_1^1. \quad (F.26)$$

Következésképpen

$$\frac{\partial (S_{22}^1)^{-1}}{\partial h} = - (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial S_{22}^1}{\partial h} (S_{22}^1)^{-1}.$$

A kezdeti geometriánál állandó b vastagságú lemezt, illetve héjat feltételezve, $\partial A^1 / \partial h = 0$ mellett a

$$\frac{\partial H^1}{\partial h} = \frac{\partial H^1}{\partial b} = - \frac{3}{b} A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} A_{II}^{1*} = - \frac{3}{b} H^1,$$

$$\frac{\partial G}{\partial h} = - \frac{3}{b} A_{II}^1 (H^1 + (S_{22}^1)^{-1}) S_{21}^1,$$

$$\frac{\partial f^1}{\partial h} = A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial q_1^1}{\partial h} - \frac{3}{b} f^1$$

eredményeket nyerjük. Az (F.24)–(F.26) összefüggéseket prizmatikus tartóra felhasználva, a

$$\frac{\partial H^1}{\partial h} = \frac{3}{b} H^1, \quad \frac{\partial G}{\partial h} = \frac{3}{b} A_{II}^1 (H^1 + (S_{22}^1)^{-1}) S_{21}^1$$

$$\frac{\partial f^1}{\partial h} = A_{II}^1 (S_{22}^1)^{-1} \frac{\partial q_1^1}{\partial h} + \frac{3}{b} f^1$$

deriváltakat kapjuk.

IRODALOM

1. CONRY, T. F.—SEIREG, A.: A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact, *Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics*, Series E., **38** (June 1971), 387–392
2. Журавлева, Т. А.—Пановко, Я. Г.: О некоторых особенностях изгиба балок при односторонней связи упругим основанием, *Строительная механика и расчет сооружений*, № 3 (1971) 18–21
3. PÁCZELT, I.—HERPAI, B.: Some Remarks on the Solution of Contact Problems of Elastic Shells, *Archivum Budowy Maszyn*, **24** (1977), 187–202
4. SINGH, K. P.—PAUL, B.: Stress Concentration in Crowned Rollers, *Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry*, Series B, **97** (August 1975), 193–196
5. OH, K. P.—TRACHMAN, E. G.: A Numerical Procedure for Designing Profiled Rolling, *Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology*, Series F, **98** (Oktober 1976), 68–75

6. HARNETT, M. J.: The Analysis of Contact Stresses in Rolling Element Bearings, *Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology*, Series F, **101** (January 1979), 105—109
7. HAUG, E. J.—KWAK, B. M.: Contact Stress Minimization by Contour Design, *Int. J. Num. Meth. Engng*, **12** (1978), 917—930
8. Пацельт, И.: Применение квадратичного программирования в контактных задачах теории упругости, *Publ. Techn. Univ. Heavy Industry*, Series D., Natural Science, Vol. **33** (1979), 171—221
9. PÁCZELT, I.: Some Optimization Problems Connected with Contact Problems in the Linear Theory of Elasticity, *Variational Methods in Mechanics of Solids*, Ed. by S. Nemat-Nasser, Pergamon Press, Oxford 1980
10. KÜNZI, H. P.—KRELLE, W.: Nichtlineare Programmierung, „Springer-Verlag“ Berlin 1962
11. Галин, Л. А.—Горячева, И. Г.: Осесимметричная контактная задача теории упругости при наличии износа, *ПММ*, **41** (1977), 807—812
12. PÁCZELT, I.—NÁNDORI, F.—ECSEDI, I.: Néhány síkrugalmasságtani érintkezési feladat megoldása kvadratikusan programozás segítségével, *NME Mechanikai Tanszék*, 1977 (kézirat)
13. PÁCZELT, I.: Solution of Elastic Contact Problems by the Finite Element Displacement Method, *Acta Techn. Hung.* **82** (1976), 353—375

Optimization of the Distribution of the Contact Pressure. — A procedure simply realizable by calculation technique is presented to be used to the optimization of the distribution of the contact pressure produced in case of a contact without friction. The minimum of the highest pressure is searched for in such a way that in the vicinity of the border of the contact region the progression of the pressure should assure the condition that the stress pattern developing at the transmission of the load is not singular at the points of the region of contact. This can be realized by a suitable formation of the bounding surfaces of bodies. The optimum form might be produced by solving linear programming problem. Propositions are established in connection with the control of the pressure and the effect of the power loss by friction, on minimizing the highest pressure, is investigated. In case of thin-walled shells and plates as well as prismatic beams, the effect of the change in the wall thickness taking place as a result of optimizing, will be taken into consideration by the development in series of the effect-function according to the Taylor series. In case of the method of finite element displacement, the problems of the influence-matrix and the production of the displacements caused by known loadings and their derivatives, with respect to the gaps, are investigated. Numerical examples are presented for controlling the pressure in case of the contact of ring-formed plane solids and the time-dependent progress of wear in proportion to the contact pressure is analysed.

Optimierung der Verteilung des Kontaktdruckes. — Es wird ein rechnungstechnisch einfach realisierbares Verfahren zur optimalen Verteilung des beim reibungslosen Kontakt auftretenden Kontaktdruckes beschrieben. Der Mindestwert des höchsten Druckes wird mit der Absicht gesucht, daß in der Nähe des Kontaktdruckbereichs die Bedingung, daß der sich bei der Lastübertragung entwickelnde Spannungszustand in den Punkten des Kontaktbereiches nicht singulär sei, gesichert werde. Dies kann durch die entsprechende Ausgestaltung der Grenzoberflächen der Körper erreicht werden. Die Optimalform wird aus der Lösung der linearen Programmierungsaufgabe erhalten. In Zusammenhang mit der Regelung des Druckes wird die Auswirkung des durch die Reibung verursachten Leistungsverlustes auf die Minimalisierung untersucht. Im Fall von dünnwandigen Schalen und Platten, bzw. von prismatischen Trägern wird die Wirkung der bei der Optimierung stattfindenden Änderung der Wanddicke durch die nach der Taylorsche Reihe durchgeführte Entwicklung der Wirkungsfunktion berücksichtigt. Im Fall der Elementenverschiebungsmethode werden die Probleme der Wirkungsmatrix, der durch die bekannten Belastungen hervorgerufenen Verschiebungen und der nach der Lücke Derivierten derselben behandelt. Zahlenbeispiele werden zur Steuerung des Druckes, im Fall des Kontakts von ebenen ringförmigen Körpern, sowie der zeitliche Ablauf der zum Kontaktdruck proportionalen Abnutzung untersucht.

TAIT TÉTELÉNEK VÁLTOZATA

SZMODITS KÁZMÉR*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1981. január 3-án]

A négyszíntétellel ekvivalens ismert tételek Tait, Heawood és Hadwinger tételei és az a követelmény, hogy a térképnek legyen Hamilton köre, vagy minden csúcspontja páros körre essen.

A következőkben egy a négyszíntétellel ekvivalens olyan új tételt vezetünk le, melynek fennállása valószínű, és így a négyszíntétel heruisztikus bizonyításának tekinthető.

TAIT ismert tétele szerint a K trivalens térkép országai 4 színnel jól akkor színezhethők, ha K határai 3 színnel úgy színezhethők, hogy minden csúcspontban 3 különböző színű határ illeszkedik. TAIT tétele ekvivalens a négyszíntétellel [1].

A következőkben egy TAIT tételéhez hasonló, ugyancsak a négyszíntétellel ekvivalens tételt vezetünk le.

A térképek szokásos színezési feltétele szerint a szomszédos országok színe különböző, és a színezéshez szükséges színek minimális száma síktérkép esetében a sík $\chi_1(K)$ kromatikus száma.

Vezessük be a főtéttel egyidejűleg érvényes következő mellékfeltételt:

Az országhatárok is legyenek színezettek úgy, hogy színük különbözzék az azokkal elválasztott országok színeitől és minden csúcspontban 3 különböző színű határ illeszkedjék.

A K térkép fő- és mellékfeltétel szerinti színezéséhez szükséges színek minimális száma a K térkép $\chi_2(K)$ kromatikus száma.

Nyilvánvalóan érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$\chi_1(K) \leq \chi_2(K).$$

Egy adott trivalens térképre rajzoljuk rá annak egy triangulációt képező G duális gráfját, ahol minden országot, illetve minden országhatárt G egy csúcspontja, illetve egy éle reprezentál. A G duális gráfjára is felírható, hogy

$$\chi_1(G) \leq \chi_2(G).$$

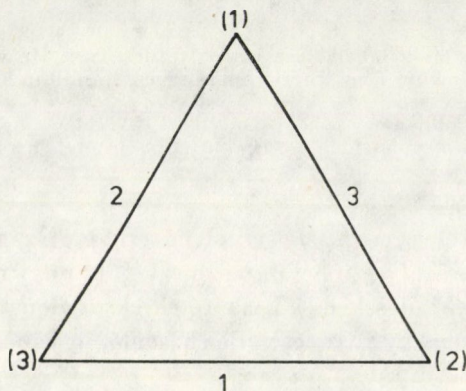
A G gráf csúcspontjait színezzük az azoknak megfelelő országok színeivel, éleit pedig színezzük az 1. 2. 3. ábrákon az összes lehetséges háromszögekre

* Prof. Dr. Szmodits Kázmér.

megadott színekkel. E színeket jelölő számokat átírjuk az éleket metsző és azoknak megfelelő országhatárookra, melyek színeit az átírt számok jelölik.

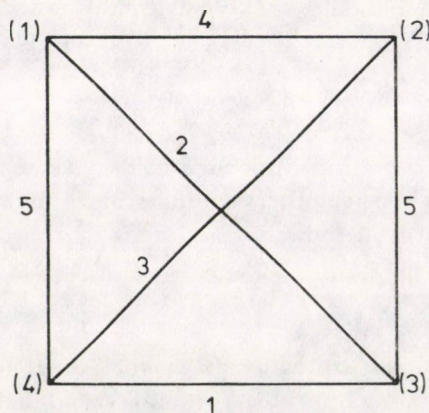
A leírt eljárással a következő három esetet tárgyaljuk:

1. Ha a térkép minden országának páros számú határa van, azok, mint ismeretes, a főfeltétel szerint 3 minimális számú színnel színezhetők, és így $\chi_1(G)_3 = 3$. A G trianguláció az 1. ábrán feltüntetett háromszögből áll, ahol a csúcspontok (1), (2), (3) számai az országok, az élek 1, 2, 3 számai pedig az országhatárok színeit jelölik.



1. ábra

A csúcspontok zárójeles számai és az élek számai jelöljenek azonos színeket. Mivel az oldalak színei nem azonosak a végpontjaikra eső csúcspontok színeivel, továbbá, mivel az 1. ábra háromszögének oldalai is különböző színűek, a fenti eljárással az országhatárok a mellékfeltétel szerint a 1, 2, 3 színekkel színezhetők és így $\chi_2(G)_3 = 3$.



2. ábra

2. A K térkép országai legyenek a főfeltétel szerint 4 színnel színezve. A triangulációban a háromszögsúcsok lehetséges színezésének száma

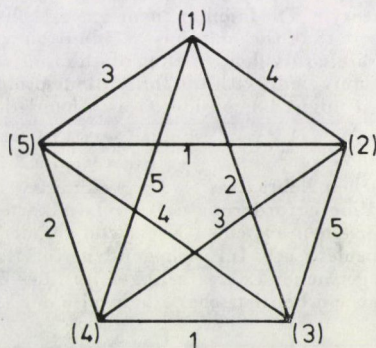
$$\binom{4}{3} = 4.$$

A 2. ábra teljes gráfja feltünteti a 4 háromszöget és azok oldalainak 1, 2, 3, 4, 5 színekkel való színezését.

A K térkép határait a fenti utasítás szerint színezve a mellékfeltételt kielégítő színezést kapjuk, ahol $\chi_2(G)_4 = 5$.

3. A K térkép országai legyenek a főfeltétel szerint 5 színnel színezve. A triangulációban a háromszögsúcsok lehetséges színezésének száma

$$\binom{5}{3} = 10.$$



3. ábra

A 3. ábra teljes gráfja feltünteti a 10 háromszöget azok oldalainak 1, 2, 3, 4, 5 színekkel való színezésével.

A K térkép határait a fenti utasítás szerint színezve, a mellékfeltételt kielégítő színezést kapjuk, ahol $\chi_2(G)_5 = 5$. A 3. ábrából kitűnik, hogy az tartalmazza a 2. ábrát.

A fentiek szerint a 4 és 5 színnel színezett térképek határainak a mellékfeltételt kielégítő átszínezése esetében:

$$\chi_2(G)_4 = \chi_2(G)_5 = 5.$$

Mivel csak a főfeltétel kielégítéséhez valószínűleg kevesebb szín szükséges, mint a fő és mellékfeltétel együttes kielégítéséhez, feltételezhető, hogy a $\chi_1(G) \leq \chi_2(G)$ összefüggés helyett a $\chi_1(G) < \chi_2(G)$ összefüggés érvényes. Az 1. különleges esetben fennáll a $\chi_1(G)_3 = \chi_2(G)_3$ összefüggés.

A 2. esetben a minden síktérképre érvényes $\chi_1(G)_4 < \chi_2(G)_4$ összefüggés ekvivalens a négyszíntétellel és azt valószínűsíti.

A 3. eset $5 = \chi_2(G)_5$ eredménye szerint valószínűleg 5 nagyobb, mint a sík kromatikus száma, mert 5 szín elegendő a fő- és mellékfeltétel kielégítéséhez és ezért ez is a négyszíntételt valószínűsíti.

Ismeretes, hogy a projektív sík, a Möbius szalag és a Klein-féle palack egyoldalú felületek kromatikus száma $\chi_1 = 6$. A fentiekhez hasonló megfontolással azt kapjuk, hogy e felületeknél $\chi_2 = 9$. Ez az eredmény is a $\chi_1 < \chi_2$ összefüggést valószínűsíti.

IRODALOM

1. SAATY, L.—KAINEN, C.: The Four Color Problem. McGraw-Hill, 1977

A Variant of Tait's Theory.—The familiar theorems established by TAIT, HEAWOOD and HADWIGER and the requirement that the map has a Hamilton-circle or all of its vertices fall upon circles of even number, are equivalent to that of the four-colour theorem. In the paper such a new conjecture, being equivalent with the four-colour problem, is deduced, the validity of which is probable, by that it might be considered as a heuristic demonstration of the four-colour problem.

Eine Version des Tait'schen Lehrsatzes. — Die bekannten Tait'schen, Heawoodschen und Hadwigerschen Lehrsätze und die Anforderung daß die Landkarte einen Hamilton'schen Kreis haben soll, oder alle Ecken derselben auf einen Kreis von gerader Nummer fallen sollen, sind gleichwertig mit dem Vierfarbenlehrsatz. Im vorliegenden Aufsatz wird ein solcher, mit dem Vierfarbenlehrsatz gleichwertiger neuer Lehrsatz abgeleitet, dessen Gültigkeit wahrscheinlich ist und demzufolge derselbe als ein heuristischer Nachweise des Vierfarbenlehrsatzes betrachtet werden kann.

EGY TENGELYSSZIMMETRIKUS ÉRINTKEZÉSI FELADAT A LINEÁRIS NYOMATÉKI FESZÜLTSGEI RUGALMASSÁGTANBAN

SZEIDL GYÖRGY*

[Beérkezett 1979. február 20-án]

A tanulmány feltérre ható köralakú merev nyomó bélyeg esetét vizsgálja nyomatéki feszültségek hatásának figyelembevételével. Az adódó vegyes kerületiértékfeladat megoldása a klasszikus esethez hasonlóan kettős integrálegyenletekre vezet. Kimutatja a dolgozat, hogy az l^2 anyagjellemző két szélső értékére ($l^2 = 0$ és $l^2 \rightarrow \infty$ esetére) síklappal lehatárolt bélyegnél a klasszikus nyomáeloszlás adódik. Másik megoldásként a kiegészítő munka minimumának elve javasolható. A kiegészítő energia funkcionál minimalizálása Ritz módszerével történik. Számpélda síklappal lehatárolt bélyegre vonatkozik. A megrajzolt diagramok érzékeltetik a klasszikus esettől való eltéréseket.

1. Bevezetés

A lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtan érintkezési feladataival — ismereteink szerint — eddig csupán az [1] tanulmány foglalkozott. Az idézett mű síkbeli viszonyok között félsíkra ható speciális alakú merev nyomó-bélyeg esetén ad megoldást. A klasszikus esettől eltérően azonban zárt alakú képletek levezetése nem volt lehetséges.

Jelen tanulmány a lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtan keretei között feltérre ható merev nyomóbélyeg esetét vizsgálja tengelyszimmetrikus viszonyokat feltételezve. A bélyeg és a feltér közötti surlódástól eltekintünk. A megoldás során a lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtan valameny-nyi feltevését érvényesnek tekintjük [2, 3].

A numerikus megoldáshoz — mechanikai szemléletessége miatt — a kiegészítő munka minimumának elve kerül felhasználásra. Ezzel összefüggésben röviden ismerteti a tanulmány a kiegészítő munka minimuma elvének alkalmazási lehetőségeit a fenti érintkezési problémával azonos jellegű vegyes kerületi érték-feladatok esetén a lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtanban.

A klasszikus rugalmasságtan analóg problémájának megoldását számos rugalmasságtani monográfia, így SNEDDON könyve is részletesen ismerteti [13].

* Dr. Szeidl György, 3529 Miskolc, Derkovits u. 54

2. Az érintkezési feladat kettős integrálegyenletekre történő visszavezetése

A vizsgált 1. ábrán vázolt tengelyszimmetrikus peremértékfeladat esetén az r, ϑ, z hengerkoordináták használata célszerű. Legyen a $z = 0$ sík a féltér határolósíkja. Jelölje az elmozdulásvektor összetevőit $(u_r, 0, u_z)$, a nem szimmetrikus feszültségi tenzor nem eltűnő összetevőit $\sigma_{rr}, \sigma_{\vartheta\vartheta}, \sigma_{zz}, \tau_{zr}, \tau_{rz}$, a nyomatéki feszültségi tenzor deviátoros részének nem eltűnő összetevőit $\mu_{z\vartheta}, \mu_{\vartheta z}, \mu_{r\vartheta}, \mu_{\vartheta r}$. A féltér határolósíkján

$$\left. \begin{aligned} u_z(0, r) &= u_z = \delta - w_0(r); & 0 \leq r < a \\ \sigma_{zz}(0, r) &= 0; & a < r \end{aligned} \right\} \quad (2.1-1, 2)$$

$$\tau_{zr}(0, r) = \mu_{z\vartheta}(0, r) = 0; \quad 0 \leq r \quad (2.1-3, 4)$$

alakúak a peremfeltételek.

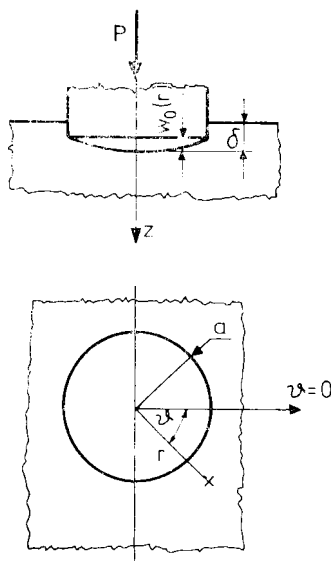
Itt $\delta = \text{const}$, a a bélyeg sugara, $w_0(r)$ pedig a bélyeg felületének formáját meghatározó síma függvényt jelöl.

Megköveteljük, hogy az elmozdulások — merevtestszerű mozgásoktól eltekintünk — és a feszültségek $z \rightarrow \infty$ esetén zérus értékűek legyenek.

A lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtan Boussinesq feladatának tengelyszimmetrikus viszonyok közötti megoldását a [4] tanulmány közli. A Boussinesq feladatra vonatkozó peremfeltételek a fentiektől csak annyiban különböznek, hogy (2.1–1.2) helyett a

$$\sigma_{zz}(0, r) = p(r) \quad (2.2)$$

egyenlet szerepel, ahol a $p(r)$ előírt terhelés.



1. ábra

Mondottak szerint az u_r , u_z elmozdulásokra, a σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , τ_{rz} , τ_{zr} feszültségekre és a $\mu_{z\theta}$, $\mu_{\theta r}$ nyomatéki feszültségekre vonatkozó [4] (4.10—1, ..., 9) alatti megoldások a jelen esetben is alkalmazhatók, ha ismeretes a bélyeg alatti $p(r)$ feszültségeloszlás. Ennek meghatározásához a [4], (4.10—2,6) alatti egyenletek felhasználásával (2.1—1.2)-ből az alábbi kettős integrálegyenletekhez jutunk

$$\delta - w_0(r) = - \int_0^a \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{\bar{p}(k)}{1 + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{l^2 k^2}{2l^2 k^2} \left(1 - \frac{k}{n}\right)} J_0(kr) dk; \quad 0 \leq r < a \quad (2.3-1)$$

$$|\sigma_{zz}(r, 0) = 0 = \int_0^\infty k \bar{p}(k) J_0(kr) dk; \quad a < r. \quad (2.3-2)$$

Fenti összefüggésekben $J_0(kr)$ a zérusrendű elsőfajú Bessel függvényt, λ , μ , l^2 anyagi konstansokat, $\bar{p}(k)$ pedig $p(r)$ zérusrendű Hankel transzformáltját jelöli, $n^2 = k^2 + 1/l^2$. A Hankel transzformáció értelmezése [13] és (2.1—2) alapján

$$\bar{p}(k) = \int_0^a r p(r) J_0(kr) dr, \quad p(r) = \int_0^\infty k \bar{p}(k) J_0(kr) dk. \quad (2.4)$$

Az

$$r/a = \varrho; \quad ak = \xi; \quad L^2 = l^2/a^2; \quad N^2 = \xi^2 L^2 + 1$$

összefüggések felhasználásával (2.3) (2.4)-ben új változókra célszerű áttérni. Eszerint:

$$-(\Delta - W_0(\varrho)) = \int_0^\infty \bar{p}(\xi) [1 + G(\xi L)] J_0(\xi \varrho) d\xi; \quad 0 \leq \varrho < 1 \quad (2.5-1)$$

$$a^2 \sigma_{zz}(\varrho) = \int_0^\infty \xi \bar{p}(\xi) J_0(\xi \varrho) d\xi = 0; \quad 1 < \varrho, \quad (2.5-2)$$

ahol

$$G(\xi L) = \alpha \frac{1 - 2L^2 \xi^2 (1 - \xi L/N)}{1 + 2\alpha L^2 \xi^2 (1 - \xi L/N)} \quad (2.6-1)$$

$$W_0(\varrho) = \alpha \beta w_0(\varrho); \quad \Delta = \alpha \beta \delta,$$

továbbá

$$\alpha = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = 2(1 - \nu), \quad \beta = 2\mu \frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} = E \frac{3 - 2\nu}{2(1 - \nu)}.$$

(E a Young-féle rugalmassági modulus, ν a Poisson szám.)

Vegyük észre, hogy $\lim_{u \rightarrow \infty} G(u) = 0$.

A (2.5—1.2) alakú kettős integrálegyenletek vizsgálatával elsőként TRANTER foglalkozott [5]. Fredholm típusú másodfajú integrálegyenlet megoldására vezeti vissza a feladat megoldását COOKE tanulmánya [6].

Jelen dolgozat a (2.5—1.2) kettős integrálegyenletek megoldását a [7, 9] tanulmányok alapján ismerteti. Megjegyezzük azonban, hogy a [6, 7]-ben bemutatott eljárások egymással ekvivalensek. A kettős integrálegyenletek elméletét ismertető összefoglaló műként SNEDDON [14] könyve említendő.

3. A kettős integrálegyenletek megoldása

A (2.5—1.2) kettős integrálegyenletek megoldását

$$\bar{p}(\xi) = \int_0^1 \varphi(\eta) \cos \xi \eta d\eta \quad (3.1)$$

alakban keressük, ahol $\varphi(\eta)$ új ismeretlen függvény.

$\bar{p}(\xi)$ fenti előállítására kielégíti a (2.5—2) egyenletet. Ezt $\bar{p}(\xi)$ helyettesítését követő parciális integrálással majd az

$$\int_0^\infty \sin \xi \eta J_0(\xi \varrho) d\xi = \begin{cases} (\eta^2 - \varrho^2)^{-\frac{1}{2}} & \varrho < \eta \\ 0 & \varrho > \eta \end{cases} \quad (a)$$

integrál ([15] 6.671—1) figyelembevételével ellenőrizhetjük.

$\varphi(\eta)$ meghatározására (3.1) (2.5—1)-be történő helyettesítése és az

$$\int_0^\infty \cos \xi \eta J_0(\xi \varrho) d\xi = \begin{cases} 0 & \varrho < \eta \\ (\varrho^2 - \eta^2)^{-\frac{1}{2}} & \varrho > \eta \end{cases} \quad (b)$$

integrál ([15] 6.671—2) felhasználása után az

$$\int_0^\varrho \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{\varrho^2 - \eta^2}} d\eta + \int_0^1 \varphi(\eta) \int_0^\infty G(\xi L) \cos \xi \eta J_0(\xi \varrho) d\xi d\eta = W_0(\varrho) - A; \quad 0 \leq \varrho < 1$$

egyenlet adódik. Ha a bal oldalon álló első integrálban az $\eta = \varrho \sin \psi$ összefüggés alapján új változóra térünk át, a második integrálban pedig a Bessel függvények ismert

$$J_0(\varrho \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\varrho \xi \sin \psi) d\psi$$

előállítását ([15] 8.411—2) helyettesítjük, akkor az

$$\int_0^{\pi/2} \left[\varphi(\varrho \sin \psi) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \varphi(\eta) \int_0^\infty G(\xi L) \cos \xi \eta \cos \xi \eta \cos(\varrho \xi \sin \psi) d\xi d\eta \right] d\psi = W_0(\varrho) - A \quad (3.2-1)$$

egyenlethez, végső soron tehát

$$\int_0^{\pi/2} F(\varrho \sin \psi) d\psi = W_0(\varrho) = W_0(\varrho) - A \quad (3.2-2)$$

alakú Schlömlich integrálegyenlethez jutunk.

Utóbbi egyenlet

$$\int_0^{\pi/2} F(\varrho) = \frac{2}{\pi} \left[w(0) + \varrho \int_0^{\pi/2} w'(\varrho \sin \psi) d\psi \right] = \widehat{W}(\varrho) \quad (3.3)$$

megoldásába helyettesítve (3.2-1) alapján $F(\varrho)$ értékét a $\varphi(\varrho)$ -ra vonatkozó

$$\varphi(\varrho) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \varphi(\eta) K(\eta, \varrho) d\eta = \widehat{W}(\varrho)$$

$$K(\eta, \varrho) = \widehat{G}(\eta + \varrho) + \widehat{G}(\eta - \varrho) \quad (3.4)$$

$$\widehat{G}(\eta) = \int_0^\infty G(\xi L) \cos \xi \eta d\xi$$

másodfajú, szimmetrikus magú Fredholm típusú integrálegyenlet következik.

A (2.3-2), (3.1) összefüggések alapján (a) felhasználásával ellenőrizhető, hogy a bélyeg alatti feszültségeloszlás, valamint a féltérre ható nyomóerő a

$$a^2 \sigma_{zz}(\varrho) = \frac{\varphi(1)}{\sqrt{1 - \varrho^2}} - \int_{\eta=\varrho}^1 \frac{\varphi'(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - \varrho^2}} d\eta \quad (3.5)$$

$$P = -2\pi \int_0^1 \varphi(\varrho) d\varrho \quad (3.6)$$

összefüggésekből számítható.

Nem sík alapú bélyeg nem teljes besüllyedése esetén a $z = 0$ síkon a normálirányú σ_{zz} feszültség folytonos. Ehhez a

$$\varphi(1) = 0 \quad (3.7)$$

egyenlet fennállása szükséges. A bélyeg δ benyomódása és az érintkezési tartomány a sugara a P nyomóerő ismeretében a (3.6), (3.7) egyenletek alapján határozható meg.

4. A klasszikus esettel történő egybevetés és a megoldhatóság kérdése

Legyen a bélyeg sík alapú ($w_0(r) \equiv 0$). Megmutatjuk, hogy a (3.4) alatti integrálegyenlet megoldásából ekkor $L \rightarrow 0$ és $L \rightarrow \infty$ esetén a klasszikus megoldás következik.

1) Az $L \rightarrow 0$ esetben — a határértékeket jobbra fenn álló zérus különbözteti meg — (3.4)-ből

$$\varphi^0(\varrho) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \varphi^0(\eta) K^0(\eta, \varrho) d\eta = -\frac{2}{\pi} \Delta \quad (4.1)$$

következik.

Ismeretes — ([15] 3.741—2) —, hogy

$$\int_0^\infty \frac{1}{\xi} \cos \xi \eta \sin \xi \varrho d\xi = \begin{cases} \pi/2 & \eta < \varrho \\ \pi/4 & \eta = \varrho \\ 0 & \eta > \varrho \end{cases} = \frac{\pi}{2} H(\varrho - \eta), \quad (4.2)$$

ahol H az egységugrás-függvény.

Könnyen meggyőződhetünk arról is (4.2) és (3.4—2.3) felhasználásával, hogy az

$$F_L(\eta, \varrho) = \int_0^\infty \frac{1}{\xi} G(\xi L) \cos \xi \eta \sin \xi \varrho d\xi \quad (4.3)$$

funkcionál tekintetében [17] rendre teljesülnek az

$$\left. \begin{aligned} F_L^0(\eta, \varrho) &= \frac{\pi}{2} G(0) H(\varrho - \eta) \\ K^0(\eta, \varrho) &= \lim_{L \rightarrow 0} \frac{d}{d\varrho} F(\eta, \varrho) = \frac{\pi}{2} G(0) \delta(\varrho - \eta) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

egyenlőségek, ahol δ a Dirac függvény. A keresett $\varphi^0(\varrho)$ határérték (4.4—2) (4.1)-be történő visszahelyettesítése után adódik:

$$\varphi^0(\varrho) = -2\Delta/\pi(1 + G(0)). \quad (4.5)$$

Ennek birtokában (3.6) és (3.5) felhasználásával számítható a nyomóerő

$$P = 4\Delta/(1 + G(0)), \quad (4.6)$$

és az ismeretlen feszültségeloszlás

$$\lim_{L \rightarrow 0} \sigma_{zz}(r, 0) = -\frac{P}{2\pi a^2} \frac{1}{(1 - (r/a)^2)^{1/2}}; \quad 0 \leq r < a. \quad (4.7)$$

2) Az $L \rightarrow \infty$ esetben $K(\eta, \varrho)$ határértéke zérus és így (3.4)-ből a

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \varphi(\varrho) = -2\Delta/\pi \quad (4.8)$$

eredmény következik. Ezzel (3.6)-ból adódik a nyomóerő

$$P = 4A, \quad (4.9)$$

(3.5)-ből pedig a feszültségeloszlás

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sigma_{zz}(r, 0) = -\frac{P}{2\pi a^2} \frac{1}{(1 - (r/a)^2)^{1/2}}; \quad 0 \leq r < a. \quad (4.10)$$

A (4.8), (4.10) összefüggések valóban a klasszikus nyomáseloszlás összefüggései.

Továbbiak a megoldhatóság kérdésével foglalkoznak.

A (3.4) alatti Fredholm típusú másodfajú szimmetrikus magú integrálegyenlet szokásos alakja:

$$\varphi(\varrho) - \lambda \int_0^1 \gamma(\eta) \tilde{K}(\eta, \varrho) d\eta = \hat{W}(\varrho), \quad (4.11)$$

ahol

$$\lambda = 1, \quad \tilde{K}(\eta, \varrho) = -\frac{1}{\pi} K(\eta, \varrho): \quad (4.12)$$

A Fredholm-féle alternatívátétel [18a] értelmében a (4.11) integrálegyenletnek létezik egy és csak egy folytonos megoldása [18b], ha $\lambda = 1$ nem sajátértéke az adjungált homogén integrálegyenletnek. Utóbbi állítás a mag $[0,1] \times [0,1]$ intervallumon való folytonosságára tekintettel akkor is igaz, ha a $[0,1]$ intervallumon szakaszonként folytonos ψ függvények halmazán teljesül az

$$\begin{aligned} I_\delta(\psi) &= \int_\delta^1 \int_\delta^1 \tilde{K}(\eta, \varrho) \psi(\eta) \psi(\varrho) d\eta d\varrho = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_\delta^1 \int_\delta^1 \int_0^\infty G(\xi L) \cos \xi \eta \cos \xi \varrho d\xi \psi(\eta) \psi(\varrho) d\eta d\varrho < 0; \quad \delta \in (0, 1) \end{aligned} \quad (4.13)$$

egyenlőtlenség, azaz, ha a mag negatív definit.

Az

$$I(\eta, \varrho) = \int_0^\infty G(\xi L) \cos \xi \eta \cos \xi \varrho d\xi$$

integrál a $\eta \in [\delta, 1]$, $\varrho \in [\delta, 1]$ tartományon egyenletesen konvergens, hiszen $\lim_{u \rightarrow \infty} G(u) = C/u^2$; $C = \text{állandó}$. Ezt figyelembe véve (4.13)-ban felcserélhetők

az integrálások. Így

$$I_\delta(\psi) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty G(\xi L) \left(\int_\delta^1 \psi(\varrho) \cos \xi \varrho d\varrho \right)^2 d\xi < 0,$$

mivel $G(\xi L) > 0$, hacsak $0 < \xi < \infty$; $L \geq 0$ és $-\infty < \nu \leq 0,5$. Q.e.d.

5. Közelítő megoldás előállítás

A (3.4) Fredholm integrálegyenlet megoldása páros indexű Legendre polinomok szerint haladó sor alakjában kereshető:

$$\begin{aligned} \varphi(\varrho) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k g_k P_{2k}(\varrho) \\ g_0 &= 1; \quad g_k = (2k-1)!!/2k!! \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

A sor ismeretlen a_k együtthatóinak számítására (3.4)-ből kiindulva ismert módon — pl. [9] — végtelen méretű lineáris egyenletrendszer vezethető le.

A dolgozat az egyenletrendszer levezetését e helyütt nem taglalja, csupán a bélyeg alatti feszültségeloszlás jellegére kíván rámutatni.

A viszonylag egyszerűen ellenőrizhető

$$\int_0^1 P_{2k}(\eta) \cos \xi \eta d\eta = (-1)^k \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} J_{2k+1/2}(\xi)$$

integrál segítségével a bélyeg alatti feszültségeloszlás Hankel transzformáltjára (3.1) és (5.1–1) alapján

$$\bar{p}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} J_{2k+1/2}(\xi) \quad (5.2)$$

az eredmény.

A [18] 7.7.4 pont (29), 2.9 pont (1), 10.9 pont (21), 10.10 pont (21), (24) formuláinak egymást követő felhasználásával kimutatható, hogy $\varrho \in [0, 1]$ esetén

$$\int_0^\infty \sqrt{\xi} J_{2k+1/2}(\xi) J_0(\xi \varrho) d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{g_k} (1 - \varrho^2)^{1/2} P_2(\sqrt{1 - \varrho^2}). \quad (5.3)$$

Ezzel a bélyeg alatti feszültségeloszlásra (2.3–2), (5.2)-ből

$$p(\varrho) = \frac{1}{a^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1 - \varrho^2)^{-1/2} P_{2k}(\sqrt{1 - \varrho^2}) \quad (5.4)$$

következik.

Megjegyzendő, hogy ALEKSZANDROV más úton teljes matematikai szigorúsággal is kimutatta a (2.5) alatti típusú kettős integrálegyenletekre vonatkozó megoldás fenti jellegét [11].

A szemügyre vett érintkezési feladat a Castigliano-féle variációs elv segítségével is tárgyalható. Klasszikus esetben a Castigliano-féle variációs elv érintkezési feladatokra történő alkalmazásával KALKER tanulmánya foglalkozik [10]. A lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtanban ezt a lehetőséget a jelen tanulmány függeléke tekinti át. A vizsgált feladatra történő alkalmazást a jelen pontban mutatjuk be.

A függelék (7.10) formulája szerint tengelyszimmetrikus viszonyok esetén a

$$\Phi(p) = \int_0^a p(r) (u_z - 2\dot{u}_z) r dr \quad (5.5)$$

funkcionál minimumát kell meghatározni, ahol u_z az ismeretlen $p(r)$ -hez tartozó megoldás, \dot{u}_z pedig előírt elmozdulás. A (2.1–1) és az $u_z(r, 0)$ -ra vonatkozó megoldást adó (2.3–1) összefüggések alkalmazásával — tekintettel a (2.5–1) levezetése során végzett átalakításokra — (5.5)-ből

$$J(p) = -\frac{2\beta}{a} \int_0^1 (\delta - w_0(\varrho)) \varrho p(\varrho) d\varrho - \int_0^\infty [1 + G(\xi L)] T^2(\xi) d\xi \quad (5.6)$$

adódik. Itt

$$J(p) = \beta \Phi(p)/a^3, \quad (5.7)$$

és

$$T(\xi) = \int_0^1 \eta p(\eta) J_0(\xi \eta) d\eta.$$

Megjegyzendő, hogy ugyanezen funkcionált kapjuk, ha a (3.4) integrálegyenlet megoldására a NOBLE által javasolt variációs módszert használjuk [12, 14].

A $J(p)$ funkcionál minimumát Ritz módszerével keressük. $p(\varrho)$ -t az (5.4) összefüggés szerint választva az ismeretlen a_k együtthatókra a

$$\frac{\partial J(p)}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8)$$

minimumfeltételből végtelen méretű lineáris egyenletrendszerhez jutunk.

A számítások során célszerű felhasználni a Legendre polinomok ortogonalitását:

$$\int_0^1 P_{2i}(\sqrt{1-\varrho^2}) P_{2j}(\sqrt{1-\varrho^2}) \varrho (1-\varrho^2)^{-1/2} d\varrho = \begin{cases} (4i+1)^{-1} & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

és az (5.3) integrált zérusrendű Hankel transzformálnak tekintve a transzformáció megfordításával nyerhető

$$\int_0^1 J_0(\xi\eta) P_{2k}(\sqrt{1-\eta^2}) \eta(1-\eta^2)^{-1/2} d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{2}} g_i \frac{1}{\sqrt{\xi}} J_{2i+1/2}(\xi)$$

kifejezést, továbbá a

$$\delta = w_0(\varrho) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k P_{2k}(\sqrt{1-\varrho^2})$$

sorfejtést, ahol

$$b_k = (4k+1) \int_0^1 \varrho(\delta - w_0(\varrho)) (1-\varrho^2)^{-1/2} P_{2k}(\sqrt{1-\varrho^2}) d\varrho.$$

Végeredményként az a_k együtthatókra vonatkozó

$$\sum_j A_{ik} a_k = B_i; \quad i, k = 0, 1, \dots \quad (5.9)$$

lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa és jobb oldala tekintetében

$$A_{ik} = g_i g_k [\delta_{ik}/(4k+1) + I_{ik}]; \quad B_k = -\frac{2}{\pi} \frac{\beta a b_k}{4k+1} \quad (5.10)$$

$$I_k = \int_0^\infty \frac{1}{\xi} G(\xi L) J_{2i+1/2}(\xi) J_{2k+1/2}(\xi) d\xi; \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

adódik, ha a [15] 6.538–2 integrált is kihasználjuk:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\eta} J_{2i+1/2}(\eta) J_{2j+1/2}(\eta) d\eta = \begin{cases} (4j+2)^{-1}, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

A (3.7) feltételt a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0 \quad (5.11)$$

egyenlet fejezi ki.

A nyomóerő értéke

$$P = -2\pi a_0. \quad (5.12)$$

Kimutatható (5.1–1) felhasználásával, követve a [9]-ben leírt gondolatmenetet, hogy (3.4)-ből ugyancsak az (5.9, 10) lineáris egyenletrendszer következik.

Az (5.9, 10) lineáris egyenletrendszer tanulmány által javasolt levezetést a mechanikai gondolatmenet áttekinthetősége indokolja.

Közelítő megoldáshoz — véges számú egyenlethez az — (5.4) sorfejtés véges szeletének felhasználásával jutunk.

6. Számpélda

Numerikus számításokat sík alapú bélyeg esetére végeztünk.

Figyelembe véve, hogy ekkor

$$B_0 = \frac{2}{\pi} \beta a \delta; \quad B_k = 0 \quad k \neq 0$$

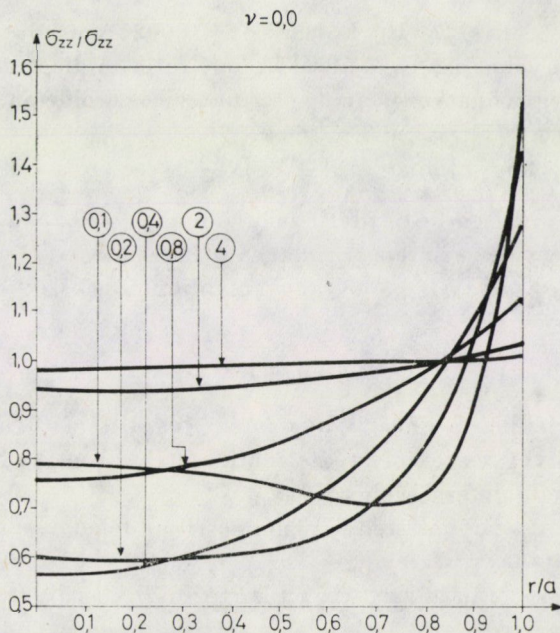
és

$$A_{00} = 1 + I_{00}$$

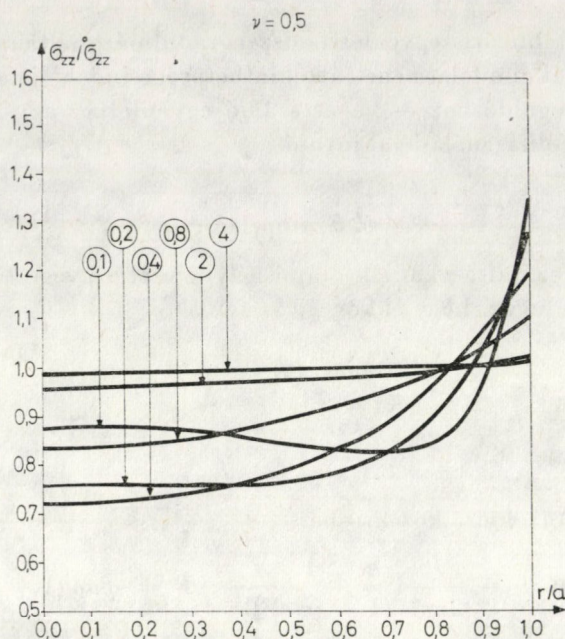
(5.13)-ra is tekintettel első közelítésben

$$\sigma_{zz}(r, 0) = -\frac{P}{2\pi a^2} \frac{1}{(1 - (r/a)^2)^{1/2}}; \quad P = 4\beta a \delta / (1 + I_{00}).$$

Innen — I_{00} (5.11—3) szerint L függvénye — $L \rightarrow 0$, és $L \rightarrow \infty$ esetén a (4.6,7) és (4.9,10) formulákhoz jutunk.



2. ábra. A bélyeg alatti σ_{zz} feszültség és a klasszikus esetre érvényes σ_{zz}^0 megoldás hányadosa azonos nyomóerő esetén, ha ν értéke zérus



3. ábra. A hélyeg alatti σ_{zz} feszültség és a klasszikus esetre érvényes $\hat{\sigma}_{zz}$ megoldás hányadosa azonos nyomóerő esetén, ha ν értéke 0,5

A $\nu = 0; 0,5$, $E = 2 \cdot 10^6$ kp/cm², $\delta = 0,0025$ cm adatokra vonatkozó számítási eredményeket a 2. és 3. ábrák szemléltetik. A diagramok jellege meg- egyezik a félsíkra vonatkozó analóg érintkezési probléma kapcsán nyert diagramok jellegével [1].

Jól látszik, hogy $\lim_{L \rightarrow \infty} \sigma_{zz} / \hat{\sigma}_{zz} \rightarrow 1$. $L \rightarrow 0$ esetén a határérték szintén egységnyi. Az $L = 0,1$ görbe kezdeti szakaszán az $L = 0,2, 0,4$ esetre érvényes görbékkel összevetve ez szintén érződik. A σ_{zz} feszültség [1]-el azonos karak- tert mutat a hélyeg széle felé haladva: gyorsabban növekszik mint a klasszikus esetben ($\sigma_{zz} / \hat{\sigma}_{zz} > 1$).

7. Függelék

Jelen függelékben a lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtan egy érintkezési típusú vegyes peremértékfeladata esetén mutatjuk be a Castigliano-féle variációs elv alkalmazási lehetőségét.

A dolgozatban tárgyalt tengelyszimmetrikus feladat az itt bemutatott- nak speciális esete.

A számítások során az (x_1, x_2, x_3) kartéziuszi koordinátarendszert hasz- náljuk és alkalmazzuk a szokásos jelöléseket: δ_{qs} Kronecker szimbólum, ε_{pq} permutációs szimbólum, vessző után álló index koordináta szerinti deriválást jelent, összegezési konvenció néma indexpárra.

Térfogati terhelésektől eltekintünk.

A lineáris nyomatékú feszültségi rugalmasságtan mezőegyenleteit a φ_p szögelfordulásvektort, az ε_{pq} elmozdulási és κ_{pq} forgási alakváltozási tenzort, az u_p elmozdulásvektorral megadó

$$\varphi_q = \frac{1}{2} \varepsilon_{qvr} u_{r,v}, \quad (7.1)$$

$$\varepsilon_{pq} = \frac{1}{2} (u_{p,q} + u_{q,p}), \quad \kappa_{pq} = \varphi_{q,p}$$

kinematikai egyenletek,

a centroszimmetrikus esetre érvényes

$$\varepsilon_{pq} = C_{pqrs} \sigma_{(rs)}, \quad \kappa_{pq} = A_{pqrs}^D \mu_{rs} \quad (7.2)$$

Hooke-törvény — C_{pqrs} , A_{pqrs} az anyagi állandók tenzora, $\sigma_{pq} = \sigma_{(pq)} + \sigma_{[pq]}$ a feszültségi tenzor (kerek zárójelben álló indexpár szimmetrikus, szögletes zárójelben álló indexpár ferde szimmetrikus részt jelez), μ_{pq} a μ_{pq} nyomatékú feszültségi tenzor deviátoros része — és a

$$\sigma_{pq,p} = 0, \quad \mu_{pq,p} + \varepsilon_{qrs} \sigma_{rs} = 0 \quad (7.3)$$

egyensúlyi egyenletek alkotják [3].

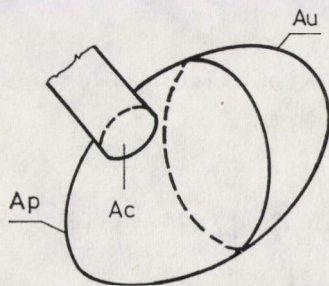
A vizsgált 4. ábrán vázolt testre — melynek határfelületét az egyszerűség kedvéért simának tételezzük fel — az

$$u_s = 0, \quad \varphi_p (\delta_{ps} - n_p n_s) = 0; \quad x_K \in A_u \quad (7.4)$$

$$P_s = n_p \left[\sigma_{(qs)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{qrs} (\mu_{rk,k}^D - \mu_{(n)}^D) \right] = 0; \quad x_k \in A_p \quad (7.5)$$

$$n_p \mu_{pq}^D (\delta_{qs} - n_q n_s) = 0; \quad x_k \in A_p \cup A_c \quad (7.6)$$

$$u_q n_q n_s = \dot{u}_s, \quad P_q (\delta_{qs} - n_q n_s) = 0; \quad x_o \in A_c$$



4. ábra

alakú peremfeltételeket írjuk elő, ahol $\frac{p}{\mu}_{(n)} = n_p \mu_{pq} n_q$, \dot{u}_s pedig $A_c - n$ adott sima függvény.

A fenti peremfeltételek mellett $A_c - n$ — mely az érintkezési tartományt jelenti — csak normálirányú terhelés lehetséges.

A σ_{rs}^* , μ_{rs}^* mezőket statikailag lehetségesnek nevezzük, ha eleget tesznek a (7.3) mezőegyenleteknek és a dinamikai, jelen esetben tehát a (7.5), (7.6–2) peremfeltételeknek.

A kiegészítő munka kifejezése jelen esetben a

$$\pi_c(\sigma_{rs}^*, \mu_{rs}^*) = \frac{1}{2} \int_V (C_{pqrs} \sigma_{(pq)}^* \sigma_{(rs)}^* + A_{pqrs} \frac{p}{\mu}_{pq}^* \frac{p}{\mu}_{rs}^*) dV - \int_{A_c} P_q n_q n_s \dot{u}_s dA \quad (7.7)$$

módon írható.

A Castigliano elv szerint (7.7) a tényleges σ_{rs} , μ_{rs} megoldásánál minimális.

Tekintsünk most egy másik az előző, (a (7.1–3) mezőegyenletek, (7.4), (7.5), (7.6) peremfeltételek által meghatározott) peremértékfeladattól csupán az $A_c - n$ előírt peremfeltételek tekintetében eltérő peremértékfeladatot.

Legyen a

$$P_q n_q n_s = p_s^* \quad x_K \in A_c \quad (7.8)$$

peremelőírás az új peremfeltétel, ahol p_s^* ismert normálirányú terhelés. Tegyük fel, hogy ismeretes a (7.1–3) mezőegyenletek és (7.4), (7.5), (7.6–2), (7.8) peremfeltételekkel megadott új peremértékfeladat megoldása. Ez a megoldás egyben statikailag lehetséges elmozdulás-, szögelfordulásmezőt, alakváltozási és feszültségi tenzormezőket is megad a régi (7.1–3), (7.4, 7.5, 7.6) peremértékfeladatra vonatkozóan.

Az említett módon nyert statikailag lehetséges mezőkkel (7.1,2)-t is kihasználva a (7.7)-ben álló térfogati integrál átalakítható felületi integrállá.

Az átalakítások során (7.3)-t, a (7.3)-ból következő

$$\sigma_{[pq]} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{pqr} \mu_{rk,k}$$

összefüggést, a Gauss tételt és a vizsgált test határoló felületének sima voltából adódó

$$\int_A n_q \varepsilon_{qrs} (\mu u_s)_{,r} dA = 0$$

integrált kell kihasználni.

A számítás eredménye:

$$\begin{aligned} \int_V (C_{pqrs} \sigma_{(pq)}^* \sigma_{(rs)}^* + A_{pqrs} \frac{p}{\mu}_{pq}^* \frac{p}{\mu}_{sr}^*) dV &= \int_A (n_p \sigma_{pq}^* \dot{u}_q + n_p \mu_{pq}^* \dot{\varphi}_q) dA = \\ &= \int_A [P_s^* \dot{u}_s + n_p \mu_{pr}^* (\delta_{rq} - n_r n_q) \dot{\varphi}_q] dA. \end{aligned}$$

Erre és a (7.4), (7.5), (7.6—2) és (7.8) peremfeltételekre is tekintettel írható, hogy

$$\pi_c(\dot{\sigma}_{sr}^*, \dot{\mu}_{rs}^*) = \int_{A_c} p_s^* \left(\frac{1}{2} \dot{u}_s - \dot{u}_s \right) dA. \quad (7.9)$$

A vizsgált tengelyszimmetrikus érintkezési feladat esetén A_c a bélyeg által meghatározott a sugarú kör, A_p a féltér határolósíkjának A_c -n kívüli része, A_u a végtelen távoli sík. (A [4] (10.1,2) összefüggések szerint az elmozdulások a végtelen távoli síkon zérus értékűek.), p^* -nak $p(r)$, u_s -nek u_z felel meg (z nem index!). E feladat megoldása tehát a (7.9)-ből adódó

$$\Phi(p) = \int_0^a p(r) (u_z - 2\dot{u}_z) r dr \quad (7.10)$$

funkcionál minimumának megkeresésére vezethető vissza.

IRODALOM

S z a k c i k k e k

1. MUKI, R.—STERNBERG, E.: The influence of couplestresses on singular stress concentrations in elastic solids *ZAMP*, **16** (1965), 611—648
2. MINDLIN, R. D.—TIERSTEN, H. F.: Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, **11** (1962), 415—448
3. KOITER, W. T.: Couple stresses in the theory of elasticity, *Proceedings Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen*, **B67** (1964), 17—29, 30—44
4. Сейдл, Д.: Осесимметричная граничная задача в линейной моментной теории упругости. *Publications of Technical University for Heavy Industry, Miskolc, Series-D Natural Sciences* **34** (1979), 27—41
5. TRANTER, C. J.: On some dual integral equations occurring in potential problems with axial symmetry, *Quart. J. Mech. and Applied Math.*, **3** (1950), 411—419
6. COOKE J. C.: A solution of Tranter's dual integral equations problem, *Quart. J. Mech. and Applied Math.* **9** (1956), 103—110
7. Лебедев, П. Н.—Уфлянд, Я. С.: Осесимметричная контактная задача для упругого слоя, *ПММ* **22** (1958), 321—326
8. SCHLÖMICH, O.—WITZSCHEL, B.: Ueber die Besselsche Funktion, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **II.**, (1857), 138—165
9. SZEFER, G.—GASZYNSKI, J.: Axisymmetric punch problem under condition of consolidation, *Archives of Mechanics* **27** (1975), 497—515
10. KALKER, J. J.: Variational principles of contact elastostatics, *J. Inst. Maths. Applies* **20** (1977), 199—219
11. Александров, В. М.: О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики, *ПММ*, Вып. 6. (1967), 1117—1131
12. NOBLE, B.: The approximate solution of dual integral equations by variational methods, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **11** (1958), 115—126

K ö n y v e k

13. SNEDDON, I. N.: Fourier transforms, McGraw-Hill, New-York—Toronto—London 1951
14. SNEDDON, I. N.: Mixed boundary value problems in potential theory, Noorth-Holland, Amsterdam 1966
15. Градштейн, И. С.—Рыжик, И. М.: Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, Физматгиз, Москва 1963

16. WHITTAKER, E. T. — WATSON, G. N.: A course of modern analysis, University Press, Cambridge 1952, 229
17. LIGHTHILL, M. J.: Introduction to Fourier analysis and generalised functions, University Press, Cambridge, 1969
18. PETROWSKY, I. G.: Lectures on the theory of integral equations, Mir Publishers, Moscow 1971, a 19, b 101
19. ERDÉLYI, A. — BATEMAN, H.: Higher transcendental functions, McGraw-Hill Book Company, New-York — Toronto — London, 1955

An Axisymmetrical Punch Problem in the Linear Couple-stress Theory of Elasticity. — The case of the elastic half space under a cylindrical rigid punch is investigated by taking the effect of the couple-stresses into account. The solution of the resulting mixed boundary-problem leads, similarly to the classic case, to dual integral equations. It is pointed out that the case of the two extreme values ($I^2 = 0$ and $I^2 \rightarrow \infty$) of the material property I^2 for the flat-end cylindrical punch, the classic stress distribution is obtained. For another solution the principle of minimum complementary energy might be suggested. Minimizing of the functional of the complementary energy is carried out by using Ritz's method. A numerical example relates to the flat-end punch. The diagrams plotted suggest the deviations from the classic case.

Ein Achsialsymmetrisches Kontaktproblem in der linearen Momentenspannungs-Elastizitätstheorie. — Untersucht wird der Fall des auf den elastischen Halbraum wirkenden starren Zylinderstempels unter Berücksichtigung der Wirkung der Momentenspannung. Die Lösung der sich daraus ergebenden gemischten Randwertaufgabe führt, wie im klassischen Fall, zu dualen Integralgleichungen. Es wird demonstriert, daß sich für die zwei Randwerte ($I^2 = 0$ und $I^2 \rightarrow \infty$) des Stoffwerts I^2 im Fall eines durch eine ebene Fläche abgeschlossenen Stempels die klassische Spannungsverteilung ergibt. Als eine andere Lösung der Aufgabe kann das Prinzip des Minimums der Komplementärenergie benutzt werden. Die Minimalisierung des Komplementärenergiefunktional wird mit Hilfe der Ritzschen Methode durchgeführt. Ein numerisches Beispiel behandelt einen durch eine Fläche abgeschlossenen Stempel. Die vorgeführten Diagramme zeigen die Abweichungen vom klassischen Fall.

CSŐSZERŰ (ZÁRT SZELVÉNYŰ) RUDAK ÖBLÖSÖDÉS-GÁTLÁSÁNAK VIZSGÁLATA ALAKTARTÓ KERESZTMETSZET ESETÉBEN

SZIDAROVSKY JÁNOS*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1980. március 19-én]

A külső csavarónyomaték vagy a keresztmetszet változásánál a tiszta csavarás öblösödés megváltozik, amit a keresztmetszet folytonossága akadályoz. Ekkor az öblösödés (ill. csavarás) gátolt. A gátlás helyén normálfeszültségek ébrednek és az egyes keresztmetszetekben az öblösödés gátlására egy parciális differenciálegyenlet vezethető le, ami zárt keresztmetszetű vékonyfalú csőnél egyszerűbbé válik. Két szimmetriatengelyű csőnél a megoldás könnyen felírható Fourier-sor alakjában. Két szimmetriatengelyű cső esetén igazolható, hogy a megoldás közel van ahhoz az eredményhez, amelyet annak feltételezésével kaphatunk, hogy az öblösödés az egyes keresztmetszetekben affin.

1. A tisztacsavarás esete

A csavarásra igénybevett egyenestengelyű rúdnak a tengelyére merőleges keresztmetszete általában nem marad sík, öblösödik.

A tisztacsavarás esetében — amikor a keresztmetszet megtartja alakját — a keresztmetszetek $w = w(xy)$ öblösödésére (az egyes pontok tengelyirányú eltolódására) a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

homogén differenciálegyenlet [1] érvényes. Gátolt csavarás esetében az öblösödés gátlását — zárt szelvény esetében — abból a feltevésből kiindulva vizsgálták, hogy a gátlás folyamán az egyes keresztmetszetekben az öblösödés affin, azaz a tengelyirányú eltolódás az egyes keresztmetszetekben csak konstans szorzóban különbözik egymástól [2]. A következőkben azt fogjuk megvizsgálni, hogy ez a feltevés jogos-e és az annak alapján történő vizsgálat indokolt-e.

Megadjuk a probléma differenciálegyenletét az általános esetre, megoldását derékszögű négyszög keresztmetszetre és összehasonlítjuk azokat az említett feltevessel nyert eredménnyel.

* Dr. Szidarovszky János, 1089 Budapest, Biró Lajos u. 42.

2. Az öblösödés gátlásának vizsgálata

A tiszta csavaráskor kialakuló öblösödést gátolhatja külső szerkezeti megoldás (pl. a keresztmetszet befogása), továbbá a keresztmetszetben, vagy a csavarónyomatékban bekövetkező változás. Ugyanis keresztmetszet változása vagy a csavarónyomaték módosulása esetében (pl. külső csavarónyomaték), a tiszta csavarási öblösödés értéke ugrásszerűen változik. Minthogy öblösödéskor a keresztmetszet nem marad sík, a szóbanlevő keresztmetszet előtti és utáni felület nem illeszkedik egymásba, amit a rúd folytonossága megakadályoz, és így gátolja a tisztacsavarási öblösödés kialakulását.

Tiszta csavarás esetében a rúd öblösödése $w_s(x, y, z)$ lenne. A gátlás helyén, a $z = 0$ keresztmetszetben, feltételezzük, hogy szerkezeti kényszer vagy külső körülmény megakadályozza az öblösödés kialakulását, vagyis a keresztmetszet pontjainak z irányú $w_{s0} = w_s(x, y, 0)$ eltolódását. A gátlásnál ezért olyan $\sigma_{z0} = \sigma_z(x, y, 0)$ normálfeszültségek lépnek fel, melyek hatására a keresztmetszet pontjainak z irányú eltolódása:

$$w_{g0} = w_g(x, y, 0) = -w_s(x, y, 0) = -w_{s0}. \quad (2.1)$$

A $z = 0$ helyen fellépő σ_{z0} normálfeszültség hatására a tetszőleges z keresztmetszetben fellépő feszültség $\sigma_z = \sigma_z(x, y, z)$, a keresztmetszet pontjainak z irányú eltolódása pedig $w_g = w_g(x, y, z)$. Így a z helyen levő keresztmetszet tényleges öblösödése:

$$w = w(x, y, z) = w_s(x, y, z) - w_g(x, y, z). \quad (2.2)$$

A fajlagos megnyúlások [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z), \quad (2.3)$$

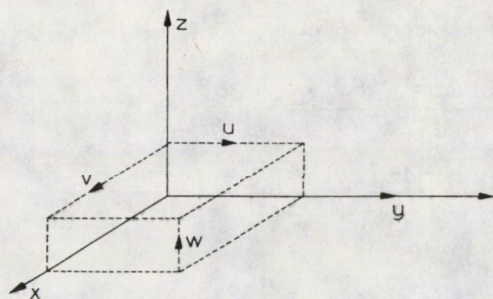
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x + \sigma_y - \nu \sigma_z), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial w_g}{\partial z} = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_x - \nu \sigma_y + \sigma_z). \quad (2.5)$$

Az elméleti rugalmasságtan alapján érvényesek (1. ábra) a

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{\partial w_g}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2.6)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{\partial w_g}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.7)$$

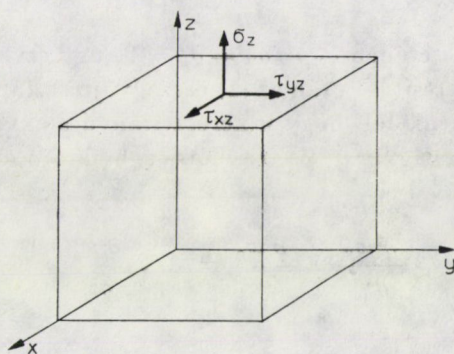


1. ábra

geometriai egyenletek, továbbá a

$$-\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad (2.8)$$

Cauchy-féle egyensúlyi egyenlet (2. ábra).



2. ábra

A (2.5)–(2.7) alatti egyenlőségek x , illetve y szerinti deriválása után az

$$\frac{\partial^2 w_g}{\partial z^2} = \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial x} (-v\sigma_x - v\sigma_y + \sigma_z), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 w_g}{\partial x^2} = \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \quad (2.10)$$

és a

$$\frac{\partial^2 w_g}{\partial y^2} = \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \quad (2.11)$$

összefüggéseket kapjuk.

A' (2.9)–(2.11) összegezésével a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_g}{\partial z^2} = \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial z} (-\nu \sigma_x - \nu \sigma_y + \sigma_z) + \\ + \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

összefüggés vezethető le.

A rugalmassági és a nyíró rugalmassági tényező közt érvényes

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.13)$$

kapcsolat és a (2.3), (2.4) alatti összefüggések felhasználásával összevonás után a

$$\frac{\partial^2 w_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_g}{\partial z^2} = -\frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.14)$$

egyenletre jutunk.

Tisztacsavarás esetében $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$, úgy ezeknek a (2.14) egyenletbe történő behelyettesítése után az (1) összegyűjtést kapjuk.

Ha azt tételeznénk fel, hogy a keresztirányú alakváltozás akadálytalanul bekövetkezhetik, vagyis σ_x és σ_y elhanyagolható σ_z mellett, úgy (2.11)-ből (2.5) felhasználásával a

$$\frac{\partial^2 w_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_g}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial^2 w_g}{\partial z^2} \quad (2.15)$$

összefüggést kapnánk.

Ha viszont azt tételeznénk fel, hogy a keresztmetszet alaktartó, vagyis $\partial w_g / \partial z$ mellett $\partial u / \partial x$ és $\partial v / \partial y$ elhanyagolható, akkor az ismert

$$\frac{1}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{1 - 2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w_g}{\partial z} \right) \quad (2.16)$$

egyenlőség alapján alaktartó keresztmetszetre a

$$\frac{\partial^2 w_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_g}{\partial y^2} = -\frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} \frac{\partial^2 w_g}{\partial z^2} \quad (2.17)$$

parciális differenciálegyenlet vezethető le.

Megjegyezzük, hogy a zárt szelvény fala irányában (2.15), arra merőleges irányban (2.17) áll közelebb a valósághoz. Rámutatunk végül arra, hogy a z

tengelyre merőleges kerületi feltételek azonosak a tisztacsavarásával, a z irányában pedig a $z = l$ helyen megszűnik a gátlás és itt $w_g = w$.

Tisztacsavarás esetében

$$\sigma_z = \frac{\partial w_g}{\partial z} = 0, \quad (2.18)$$

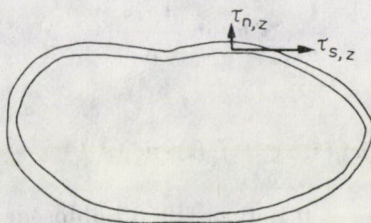
és ekkor (2.17) (1)-re egyszerűsödik.

3. Alkalmazás a vékonyfalú csőre

Vékonyfalú cső esetében a fal síkjába eső nyíróerő mellett a fal síkjára merőleges nyíróerő elhanyagolható.

Legyen a fal tengelyére merőleges nyíró feszültség τ_{nz} , a fal tengelyébe eső τ_{sz} , így (2.8) alapján (3. ábra):

$$-\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial n}. \quad (3.1)$$



3. ábra

Integrálva a fal v szélességére, a középérték-tétel felhasználásával

$$-v \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} = v \frac{\partial \tau_{sz}^*}{\partial s} + v \frac{\partial \tau_{nz}^*}{\partial n}, \quad (3.2)$$

ahol a csillag arra utal, hogy a feszültség a v szélesség valamely ζ középértékére vonatkozik.

De

$$v \frac{\partial \tau_{sz}^*}{\partial s} = \int_0^v \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial s} dn = t_s \quad (3.3)$$

és

$$v \frac{\partial \tau_{nz}^*}{\partial s} = \int_0^v \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial s} dn = t_n, \quad (3.4)$$

ahol t_s a fal tengelyébe eső csúsztatóerő, t_n pedig az arra merőleges irányú csúsztatóerő a fal egységnyi hosszára vonatkoztatva.

De t_n elhanyagolható t_s mellett, és így

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{sz}^*}{\partial s} \quad (3.5)$$

A (2.15)–(2.19) alatti levezetéshez hasonlóan:

$$-\frac{2(1-\nu^2)v}{1-\nu-2\nu^2} \frac{\partial^2 w_g^*}{\partial z^2} = v \frac{\partial^2 w_g^*}{\partial s^2} \quad (3.6)$$

Ha a csőnek szimmetriatengelye van, egyrészt az öblösödés a szimmetria-tengelyen zérus, másrészt az öblösödés a félszelvény hosszában előjelet vált. Így az öblösödés periódusa a szelvény kerületének fele ($K/2$).

Fejtsük Fourier-sorba a falvastagságával súlyozott öblösödést. Az együtt-hatók

$$b_i = \frac{4}{K} \int_0^{K/2} v \cdot w_g^*(s, 0) \sin \frac{4\pi i s}{K} ds, \quad (3.7)$$

a sor maga

$$w_g^*(s, 0) = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin \frac{4\pi i s}{K} = \sum_{i=1}^{\infty} w_{gi}^*(s, 0). \quad (3.8)$$

Keressük a megoldást

$$w_{gi}^*(s, z) = f_{gi}(z) \cdot w_{gi}^*(s, 0) \quad (3.9)$$

alakban, ahol $w_{gi}^*(s, 0)$ a $z = 0$ helyen fellépő öblösödésnek a fal vastagságára vonatkozó átlaga.

(3.9)-et (3.6)-ba írva, az i -edik Fourier tagra érvényes a

$$\frac{2(1-\nu^2)}{1-\nu-2\nu^2} f_{gi}''(z) = \frac{16\pi^2 i^2}{K^2} f_{gi}(z) \quad (3.10)$$

összefüggés, amiből az

$$f_{gi}''(z) - \lambda_i^2 f_{gi}(z) = 0 \quad (3.11)$$

közönséges differenciaegyenletet kapjuk, ahol

$$\lambda_i^2 = \frac{8\pi^2 i^2 (1-\nu-2\nu^2)}{K^2 (1-\nu^2)}. \quad (3.12)$$

Ezek szerint az öblösödés gátlásakor az öblösödés Fourier-sorának egyes tagjaira pontosan igaz az affinitás, de a teljes öblösödésre nem szükségszerűen. A (3.11) alatti differenciálegyenletnek az

$$f_i(0) = -1 \quad (3.13/a)$$

és

$$f_i(l) = 0 \quad (3.13/b)$$

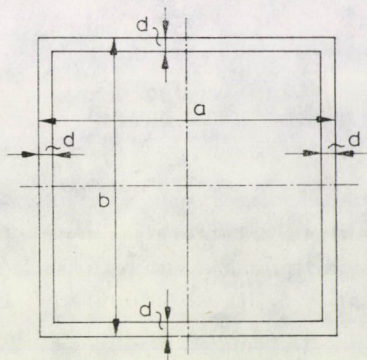
határfeltételeket kielégítő partikuláris megoldása:

$$f_i(z) = -\frac{\cosh \lambda_i l}{\sinh \lambda_i l} \sinh \lambda_i z + \cosh \lambda_i z. \quad (3.14)$$

4. Értékelés

Ha a cső derékszögű négyszög keresztmetszetű és falvastagsága állandó (4. ábra); akkor

$$K = 2(a + b), \quad (4.1)$$



4. ábra

ahol a és b az oldalhossz; és $\nu = 0$ értékkel számolva

$$\lambda_i^2 = \frac{19 \cdot 74 \cdot i^2}{(a + b)^2}. \quad (4.2)$$

UMANSZKIJ [2] a teljes öblösödést az egyes keresztmetszetekben affinnak tételezte fel, és így szerinté fennáll a

$$w(s, z) = f_g(z) \cdot w(s, 0) \quad (4.3)$$

összefüggés. Ebből a feltevésből vezeti le az

$$f_g''(z) - \alpha^2 f_g(z) = -\alpha^2 \quad (4.4)$$

differenciálegyenletet, amelyben derékszögű négyszög keresztmetszet és állandó falvastagság esetére ($\nu = 0$) az

$$\alpha^2 = \frac{48 G}{E (a + b)^2} = \frac{24}{(a + b)^2} \quad (4.5)$$

összefüggés határozható meg. A (4.4) alatti egyenletnek az

$$f_g(0) = 0 \quad (4.6)$$

és

$$f_g(l) = 1 \quad (4.7)$$

határfeltételeket kielégítő megoldása

$$f_g(z) = \frac{\cosh \alpha l}{\sinh \alpha l} \sinh \alpha z - \cosh \alpha z + 1, \quad (4.8)$$

amiből a gátlás tényezője

$$f(z) = 1 - f_g(z) = - \frac{\cosh \alpha l}{\sinh \alpha l} \sinh \alpha z + \cosh \alpha z. \quad (4.9)$$

A (3.14) és (4.9) képletek megegyeznek egymással. A (3.12) és (4.5) alatti összefüggések összehasonlítása azt mutatja, hogy az öblösödés gátlásának vizsgálatakor az öblösödés affinitására vonatkozó feltételezés, ha nem is teljesen pontos, de a gyakorlati számítás szempontjából kielégítő, különös tekintettel arra, hogy az öblösödés gátlásából eredő feszültség a teljes feszültségnek csak néhány százalékát teszi ki.

IRODALOM

1. TIMOSHENKO, S.—GOODIER, J. N.: Theory of Elasticity. McGraw-Hill Book Company, 1951
2. PONOMARJOV, Sz. D.: Szilárdsági számítások a gépészetben, 2. kötet, Műszaki Könyvkiadó, 1964
3. CSONKA Pál: Két végén megfogott négyzetes cső csavarása, MTA Műszaki Oszt. Közl. 24 (1959), 61—63

Investigation on Closed (Tube-like) Beams of not Distorting Section under Effect of Restraint. Warping — In case of change of the external torsional moment or of the cross section the warping caused by pure torsion also changes which is, however, being hindered by the continuity of the cross sections. In such cases, the warping (or torsion) is constrained. At the region of the hindrance, normal stress is induced and for the restraint of the warping at the different cross section a partial differential equation can be established which, in case of a thin-walled tube of closed cross section, becomes simpler. For a tube of two axis of symmetry, the solution may be put down in the form of a Fourier-series. For the case of a tube of two axis of symmetry it readily may be verified that the solution closely approaches the result which might be obtained by assuming the warping to be affine in each cross section.

Untersuchung der Wölbungsverhinderung von Hohlstäben (geschlossenen Profils) im Fall von einem formbeständigen Querschnitt. — Im Fall von einer äußeren Verdrehungsmoments der Querschnittsverformungsänderung ändert sich auch die reine Verdrehungswölbung, die durch die Kontinuität des Querschnitts verhindert wird. Es handelt sich in diesem Fall um eine verhinderte Wölbung (d. h., Verdrehung). An der Stelle der Verhinderung werden Normalspannungen hervorgerufen, und an den einzelnen Querschnitten kann eine partielle Differentialgleichung zur Verhinderung der Wölbung abgeleitet werden, die für ein dünnwandiges Rohr mit geschlossenem Querschnitt einfacher wird. Für ein Rohr mit zwei Symmetrieachsen kann die Lösung in der Form einer Fourier-Reihe leicht aufgeschrieben werden. Im Fall eines Rohrs mit zwei Symmetrieachsen kann man nachweisen, daß die Lösung nahe zu jenem Ergebnis liegt, welches man durch die Voraussetzung erhält, daß die Wölbung an den einzelnen Querschnitten affin ist.

KÖNYVISMERTETÉS

Major Sándor

DYNAMICS IN CIVIL ENGINEERING

Akadémiai Kiadó, Budapest 1980, I. kötet 320. o., II. kötet 302. o., III. kötet 306 o.,
IV. kötet 306 o. Irodalomjegyzék 1377 címszóval

MAJOR professzor négykötetes angol nyelvű könyve szerves egységben követi az első magyar nyelvű, majd a német- és angol nyelvű kiadásokat. Tekintettel az utóbbi idők rohamos fejlődésére, a legégetőbb kérdéseket is legalább négy kötetben kellett közreadni. A mű mind az elméleti, mind a gyakorlati szakembernek hasznos segítőtársa, számpéldák és gazdag hivatkozás teszik könnyebbé és egyszerűbbé a kutatói, illetve a tervezői munkát. Az egyes fejezetek az alábbi témát ölelik fel:

Az I. kötet elméleti felépítése tükrözi a szerző azon elképzelését, hogy az a legújabb vizsgálati eredmények mellett a gyakorlat által bebizonyított és használható elméleti eredményeket is tartalmazza. Az előző kiadások adatait az újabb eredményekkel kiegészítve, részletesebben tárgyalja a csillapítás elméleti levezetését és módszereit. Figyelembe veszi a lökés-szerű erőhatások és a többszabadságfokú rendszerek kérdéseit, kiterjesztve részletesen a hat-szabadságfokú rendszerekre is. A gépalapok osztályozásakor már kitér a rugókkal alátámasztott alapozási módszerekre és kibővíti a gépalapok tervezésére vonatkozó általános esetek ismertetését és feltételeit. Részletesebben tér ki az építési anyagoknál a fáradás és a rugalmas-sági modulus meghatározásának a kérdéseire. A tervezés szempontjából egyedülállóan fontos a táblázatokban és diagramokban a szerző által összeállított olyan adathalmaz, amely a tudományos kutatók részére is — az alternatívák figyelembevételével — lehetőséget nyújt a talajra ható dinamikus erőhatások optimális figyelembevételére.

A II. kötet témája az első kötet elméleti és gyakorlati alapjaira támaszkodik. Felépítésében egységesen tárgyalja mindazoknak a gépeknek a technológiáját és alapozási kérdéseit, amelyek ütohatásúak, alacsony fordulatszámúak, illetve különleges rendeltetésűek, beleértve a padlókra, ill. a födémekre helyezett szerszámgépek alapjait. A rezgéscsillapítás kérdéseit részletesen tárgyalja, figyelembe véve a rugózás és csillapítás együttes hatásait. Részletesen kitér az acél- és gumirugókra, azok összehasonlítására, előnyeikre és hátrányaikra. A tárgyalt témakörök példáit új számpéldákkal egészíti ki. Ezután azokat a géptechnikai módszereket ismerteti, amelyek a gépeken belül igyekeznek már eleve elérni a rezgések csökkentését, illetve kiküszöbölését. Így kitér a kritikus fordulatszámok és a gépek kiegyensúlyozásának a kérdéseire, az antivibrátorokra és amortizátorokra is. Végül tárgyalja a rugalmas tengelykapcsolókat, amelyek ismertetését új típusokkal egészíti ki. A régebbi típusok elhagyásával, általában a korszerűbb típusokat tárgyalja. Lényeges változtatásokat eszközölt a kalapácsolapok számításainál is.

A III. kötet a nagyfordulatszámú gépek alapozásának problémáival foglalkozik. de tárgyalja a gépek technológiai kérdéseit is. A kötet anyaga elméleti részében az első kötet alapkérdéseket tárgyaló anyagára támaszkodik. Az első fejezet a gépek osztályozásával és elrendezési kérdéseivel is foglalkozik, megadja a szerkezeti fejlődés irányait, a terhelések felvétel módjait, az anyagfelhasználás és a gazdaságos tervezés adatait. A gazdaságos elrendezés fontos kérdéseit is tárgyalja, figyelembe véve a szabadtéri és részben szabadtéri megoldásokat, különös tekintettel a hő- és nukleáris erőművekre. A kötet második fejezete az elméleti alapok ismertetését tartalmazza, és közli a különböző számítási módszereket. Itt a könyv a rezonancia, az amplitudó és a kombinált módszerek ismertetését új összeállításban tárgyalja, amelyben a legutóbbi évtized kialakult gyakorlata is kifejezésre jut.

A IV. kötet első része a magasépítési és ipari szerkezetek általános dinamikai problémáival foglalkozik, így a szélhatásokkal, a földrengés okozta hatásokkal, megemlítve a robbantás okozta hatásokat is. A kötet második része a vízépitési szerkezetek, vízépitési létesítmények és vízi műtárgyak dinamikus problémáival foglalkozik. Kitér a gátaknál fellépő dinamikus kérdésekre, a csővezetékek nyomáslengési kérdéseire és a vízerőművek és szivattyútelepek dinamikus problémáira. Tárgyalja még az úszó építmények, úszó szivattyútelepek rezgés-problémáit, amely kérdések keretében a hajó lengésekkel is foglalkozik, beleértve a hajókban elhelyezett gépek rugalmas alátámasztását. A kötet harmadik része a hidakon előforduló dinamikus problémákat tárgyalja, így a hidaknak ebből a szempontból fesztávolság szerinti osztályozását ismerteti, majd elméleti és hidakon végzett rezgésmérési módszerekkel foglalkozik, továbbá azokkal a kérdésekkel is, amelyek nemzetközileg megszervezett kísérletek alapján a dinamikus tényező meghatározására vonatkoznak. Külön tárgyalja még ez a rész a nagy

feszítávolságú függő hidak és a kis feszítávolságú, főleg csőhidak dinamikai problémáit. Ezek elméleti elgondolások alapján, főleg kísérleti eredményekre támaszkodnak.

Az új, négykötetes mű a hazai és a nemzetközi szakirodalom fontos alkotórésze, és mint eddig is, ezután is számítani lehet az angol nyelvterület egyértelmű elismerésére. Ezt az a tény támasztja alá különlegesen, hogy számos olyan új témát vet fel — mint a felhőkarcolók kérdései, földrengés problémák, tengerparti erőművek problémái — melyek a hazai gyakorlaton túlmutatnak. Figyelemre méltó, hogy a könyv egyaránt tartalmazza, összehasonlítja és értékeli az angol- és orosz nyelvű szakirodalmi eredményeket, és feldolgozásmódjában messzeemenően figyelembe veszi a számítástechnika korszerű lehetőségeit.

Dr. Halász Ottó

Palotás László—Balázs György:

MÉRNÖKI SZERKEZETEK ANYAGTANA 3

Akadémiai Kiadó, Budapest 1980. 869 oldal, 377 ábra, 163 táblázat, 932 irodalmi hivatkozás

Jelen mű PALOTÁS László *Mérnöki szerkezetek anyagtana* című három kötetes könyvének harmadik kötete.

A könyv *Általános anyagismeret* címet viselő első kötete a mérnöki szerkezetek anyagtanának általános alapismereteit, a szerkezeti anyagok tulajdonságait, azok szilárdsági vizsgálatát és értékelését tárgyalta. A könyv *Fa-kő-fém-kötőanyagok* című második kötete a címadó anyagok tulajdonságaival és vizsgálataival, azok termékeinek előállításával és felhasználásával foglalkozott. E kötetében PALOTÁS László szerzőtársai KERTÉSZ Pál és VERESS Sándor voltak.

A jelen harmadik kötet a beton, a könnyűbeton, a habarcs, a kerámia, a műanyagok és a szálerősítésű szerkezeti anyagok sajátosságait ismerteti. A könyv első három főfejezetének szerzője PALOTÁS László, a második három főfejezetet BALÁZS György írta. Ketten együtt valósítják meg azt a célt, amelyet a kötet előszavában maguk elé tűztek: tudományos igénygel szolgálni a gyakorlatot.

A *beton* című főfejezet a betonnak és alkotórészeinek tulajdonságait, az azokat befolyásoló belső és külső tényezőket, a követelményeknek megfelelő beton tervezését és ellenőrzését tárgyalja. E főfejezet első fejezete a beton fogalmát, fajtáit és jelölésüket ismerteti. A második fejezet a beton alapanyagaival, a vízzel, az adalékanyaggal és a betonjavító anyagokkal foglalkozik. A cementről a második kötetben esett szó. A betonkészítéshez használt keverővíz szerepe kettős: a cement kötését teszi lehetővé és plasztifikál, de ezen kívül betont károsító szennyeződések hordozója is lehet, amiértis felhasználhatósága kémiai feltételekhez kötött. A beton adalékanyagok fajtáit a könyv az új MSZ 18291 és MSZ 18293 szabványok szellemében tárgyalja, és taglalja a beton adalékanyagokkal szemben támasztott szennyezettségi, térfogat- és tömegjellemzési, hidro- és hőtechnikai, keménységi, szilárdsági, szemmegoszlási, szemalaki és fajlagos felületi követelményeket. A betonjavító anyagok kiegészítők és felületképzők lehetnek. Legjelentősebbek közülük az adalékszerek, amelyek a kiegészítő anyagok csoportjába tartoznak. Az adalékszereknek egy adott funkciót tekintve is a legkülönbözőbb márkaneveken számos változata van, amelyek közül a könyv elsősorban a hagyományos termékek ismertetésére vállalkozhatott. A harmadik fejezet a beton jellemzőit, azaz a friss beton tulajdonságait, és a megszilárdult beton fizikai, szilárdsági és alakváltozási jellemzőit tárgyalja öröndetes részletességgel és korszerűséggel. Külön fejezet, a negyedik foglalkozik a beton jellemzőit befolyásoló olyan tényezőkkel, mint a cement minősége és mennyisége, a vízmennyiség és a légtartalom, az adalékanyag minősége és összetétele, a beton kora, készítése, szállítása, kezelése és tárolása. Az ötödik fejezet a betont károsító vegyi hatásokkal és a korrózióval szembeni betonvédelemmel foglalkozik. A hatodik fejezet a különleges tényezők beton tulajdonságokra gyakorolt hatását vizsgálja. Ilyenek a hőmérsékletváltozás, a fagy, a mesterséges melegítés, az alakváltozás okozta saját feszültségek. A hetedik fejezet a beton tervezésének alapelveire, a betonkeverék megválasztására és a beton helyszíni ellenőrzésére tér ki.

A *könnyűbetonokat* a könyv kilencedik főfejezete négy fejezetben tárgyalja. Az első fejezet általános megállapításai a könnyűbetonok meghatározását, csoportosítását tartalmazza, és a közönséges betonoktól eltérő feszültségelosztásokkal foglalkozik. Az alapanyagokkal és azok hatásával kapcsolatos tudnivalók a második fejezetben találhatók. A kötőanyagot a fejezet csak röviden érinti. Bővebb tárgyalást a természetes könnyűadalékanyagok, a természetes anyagokból ipari úton előállított adalékanyagok, az ipari hulladékok és az azokból előállított mesterséges adalékanyagok, valamint a szerves könnyűadalékanyagok tulajdonságai és vizsgálata, továbbá a víz, a légtartalom és a porozítás kérdései igényelnek. A hőszigetelő

és a teherhordó könnyűbetonok tulajdonságait, összetételük tervezését, méretezését az egy-szemcsés, a folytonos és lépcsős szemmegoszlású betonokra és a sejtbetonokra vonatkozóan a harmadik és negyedik fejezet tárgyalja.

A tizedik főfejezet négy fejezetben foglalkozik a *habarcsokkal*. Az első fejezet a habarcs meghatározását és felosztását, a második fejezet a habarcs anyagait, így a kötőanyagot, a javítóanyagot, az adalékanyagot és a vizet tárgyalja nem nagy, de elegendő terjedelemben. A harmadik fejezetben az alapanyagok és a friss és megszilárdult habarcs vizsgálatáról esik szó úgy, hogy a figyelem a betontól eltérő tulajdonságokra irányul. A negyedik fejezet a falazó, vakoló, felületképző, ágyazó, burkoló, simító, vízzáró és injektáló mészs- és cementhabarcsok, továbbá a gipszhabarcsok és egyéb különleges habarcsok minőségi követelményeit ismerteti.

A tizennegyedik főfejezet az *építészeti kerámiákat* ismerteti. Ez a rész hét fejezetet tartalmaz. Az első fejezet a kerámiák fogalmát, a durva-, finom- és tűzálló kerámiák funkció, szövetszerkezet és szín szerinti felosztását ismerteti. A második fejezet a gyártástechnológiának a nyersanyag megválasztásából, előkészítéséből, formázásból, szárításból, égetésből, mázázásból és festésből álló közös vonásaival foglalkozik. A nyersanyagok közül az agyakok tulajdonságaira találhatók részletes adatok. Szó esik a téglá- és cserépgyártmányok leggyakoribb gyártástechnológiai hibáiról is. A harmadik fejezet a téglák és tetőcserepek, a negyedik fejezet a hőszigetelő kerámiák — köztük az újdonság számba menő Poroton-tégla —, az ötödik fejezet a kőagyag gyártmányok, a hatodik fejezet a díszítő és burkoló kerámiák, a hetedik fejezet a tűzálló építőanyagok termékismertetésével és tulajdonságainak, azok vizsgálatának tárgyalásával foglalkozik. E fejezetek eléggé nem dicserhető közös vonása, hogy jól szerkesztett szemléltető ábrák és a műszaki jellemzők táblázatos összefoglalása segítik a bőséges termékválaszték közötti eligazodást.

A könyv *műanyagokat* tárgyaló tizenkettedik főfejezetének ismereteit az építőipari műanyagok felhasználásának rohamos terjedése teszi nagyon időszerűvé. A főfejezet hét fejezetből áll. Az első és második fejezet műanyagok csoportosítását, fogalmát, általános jellemzését tárgyalja. E fejezetek kitérnek olyan fontos tulajdonságokra, mint a molekulák között ható erők, a fizikai állapot a hőmérséklet függvényében. A harmadik fejezet az építőiparban használt polimerizációs, poliaddíciós és polikondenzációs műanyagok főbb típusait és jellemzőit ismerteti. A negyedik fejezet külön tárgyalja a hőre keményedő és a hőre lágyuló műanyagok formázását, valamint a különleges műanyagfeldolgozási technológiákat. Az ötödik fejezet a műanyagok építőipari felhasználásával foglalkozik. A főbb felhasználási területek a következők: polimerrel impregnált beton, polimer-beton, polimer-cementbeton, műanyag ragasztók, hegzáró anyagok, tartószerkezetek megtámasztására használható elasztomerek, műanyag csövek, műanyag habok, tekercselt lemezek, műanyag kötésű táblák és lemezek. A fejezet a felületképző anyagokra nem tér ki, valószínűleg azért, mert azokról érintőlegesen szó esett a betonoknál. A műanyagok tömegi, szilárdsági, alakváltozási, felületi, hőtani, hidrotechnikai, villamos és optikai tulajdonságait, a vegyszerállóságot, a tűzállóságot és a műanyagok öregedését, továbbá a felsorolt jellemzők vizsgálatát a hatodik fejezet tárgyalja. A hetedik fejezet a műanyag teherviselő elemek toldásával foglalkozik, és ismerteti a koncentrált erőátadással kapcsolatos tudnivalókat.

A háromkötetes mű utolsó, tizenharmadik főfejezete újszerű, a *szálerősítésű szerkezeti anyagokat*, tehát a szálerősítésű műanyagokat, továbbá az acélszál és az üvegszál erősítésű betonokat öt fejezetben tárgyalja. Az azbesztcementtel a könyv helyszűke miatt nem foglalkozik. Az első fejezet rövid áttekintést ad a szálerősítésű szerkezeti anyagokról, a második az erősítésre használt anyagok, az üvegszál, az azbeszt, a szénszál, a fémhuzal és a műanyagszál tulajdonságait ismerteti. A harmadik fejezet a szálerősítésű műanyagok témakörén belül az erősített műanyagok összetételével, az alkotók megválasztásával, az üvegszál felületi kezelésével, az üveggyanta tapadásával, az üvegszál-erősítésű műanyagok feldolgozásával, tulajdonságaival és felhasználásával, továbbá az azbesztszállal erősített műanyaggal, valamint a szénszállal erősített műanyaggal kapcsolatos kérdéseket tárgyalja, és összehasonlításra teszi a különböző szálerősített műanyagok között. A negyedik fejezet a kőszertű anyagok szórtszálal erősítésének szerepével és az acélszál, üvegszál és műszál erősítésű cementkő, és a rost erősítésű gipsz leglényegesebb ismeretanyagával foglalkozik. Az ötödik, egyben a könyv utolsó fejezete a kombinált technológiákról, így az üvegszál-kötéllal erősített betonról, és az üvegszállal feszített beton nyomócsövekről ad áttekintést.

A *Mérnöki szerkezetek anyagtudományának* harmadik kötete az első két kötethez hasonlóan elmélyült, magas színvonalú, minden korábbi hasonló könyvnél részletesebb, átfogóbb tudományos munka. Bár a munka eredményességéhez a szerzőtársak, az Akadémiai Kiadó és az Akadémiai Nyomda is kétségkívül nagy mértékben hozzájárultak, meg kell állapítani, hogy a három kötetes mű elsősorban PALOTÁS László ötven dolgoz esztendő alatt felgyülemlett és kimunkált hatalmas ismeretanyagát teszi közzé.

Dr. Kausay Tibor

TARTALOMJEGYZÉK

Gábor László	1910—1981 (Párkányi Mihály)	1
<i>Csonka Pál:</i>	Peremén befogott ellipszislemez	7
<i>Márkus Gyula:</i>	Periodikusan terhelt rugalmas ágyazású körlemez	13
<i>Kerényi Dénes:</i>	Analitikus módszer lemezek örvényáramvesztésének közelítő számítására	41
<i>Páczelt István:</i>	„TESZGA” végeselemes programrendszer tengelyszimmetrikus geometriájú és alakváltozású szerkezetek szilárdságtani számítására	63
<i>Kontur István:</i>	Elkeveredési vizsgálatok a Dunán	79
<i>Ecsedi István:</i>	Kiegészítések a körív középvonalú rudak csavarási feladatával kapcsolatban	93
<i>Páczelt István:</i>	Az érintkezési nyomás megoszlásának optimalizálása	111
<i>Szmodits Kázmér:</i>	Tait tételének változata	147
<i>Szeidl György:</i>	Egy tengely szimmetrikus érintkezési feladat a lineáris nyomatéki feszültségi rugalmasságtanban	151
<i>Szidarovszky János:</i>	Csőszerű, zártszelvényű rudak öblösödésgátlásának vizsgálata alaktartó keresztmetszet esetén	167

KÖNYVISMERTETÉS

<i>Major Sándor:</i>	Dynamics in Civil Engineering (Halász O.)	177
<i>Palotás L.—Balázs Gy.:</i>	Mérnöki szerkezetek anyagtana 3. Beton—Habarcs—Kerámia—Műanyag (Kausay T.)	178

CONTENT

Gábor, L.	1910—1981 (<i>Párkányi, M.</i>)	1
<i>Csonka, P.</i>	Elliptic Plate with Clamped Edge	7
<i>Márkus, Gy.</i>	Circular Plates on Elastic Foundation Submitted to Periodic Load	13
<i>Kerényi, D.</i>	Analytic Method for the Approximate Calculation of the Eddy-Current Loss of a Metal Plate Placed into a Magnetic Field	41
<i>Páczelt, I.</i>	Finite Element Program System TESZGA for the Strength Calculation of Structures of Axisymmetrical Geometry and Deformation	63
<i>Kontur, I.</i>	Investigations on Pollution-Mixing in the Danube	79
<i>Ecsedi, I.</i>	Contribution to the Torsion Problem of Bars with Circular Centre-line	93
<i>Páczelt, I.</i>	Optimization of the Distribution of the Contact Pressure	111
<i>Szmodits, K.</i>	A Variant of Tait's Theory	147
<i>Szeidl, Gy.</i>	An Axisymmetrical Punch Problem in the Linear Couple-Stress Theory of Elasticity	151
<i>Szidarovszky, J.</i>	Investigation on Closed (Tube-like) Beams of not Distorting Section under Effect of Restraint Warping	167

BOOK REVIEW

<i>S. Major</i>	Dynamics in Civil Engineering (O. Halász)	177
<i>Palotás, L.—Balázs, Gy.</i>	Mérnöki Szerkezetek Anyagtana, Part. 3. (Kausay, T.)	178

INHALTSVERZEICHNIS

Gábor, L.	1910–1981 (<i>Párkányi, M.</i>)	1
<i>Csonka, P.</i>	Elliptische Platte mit Randeinspannung	7
<i>Márkus, Gy.</i>	Elastisch gebettete Kreisplatten mit periodischer Belastung	13
<i>Kerényi, D.</i>	Analytisches Näherungsverfahren zur Berechnung von Wirbelströmen in Metallplatten	41
<i>Páczelt, I.</i>	Elementenprogrammsystem TESZGA zur Festigkeitsberechnung von Konstruktionen mit achsensymmetrischer Geometrie und Verformung	63
<i>Kontur, I.</i>	Schmutzstoffvermischungsuntersuchungen im Donauwasser	79
<i>Ecsedi, I.</i>	Beitrag zum Torsionsproblem von Stäben mit Kreismittellinie	93
<i>Páczelt, I.</i>	Optimierung der Verteilung des Kontaktdruckes	111
<i>Szmodits, K.</i>	Eine Version des Taitischen Lehrsatzes	147
<i>Szeidl, Gy.</i>	Ein Achsialsymmetrisches Kontaktproblem in der linearen Momenten-spannungs-Elastizitätstheorie	151
<i>Szidarovszky, J.</i>	Untersuchung der Wölbungsverbindung von Hohlstäben (geschlossenen Profils) im Fall von einem formbeständigen Querschnitt	167

BÜCHERSCHAU

<i>Major, S.</i>	Dynamics in Civil Engineering (Halász, O.)	177
<i>Palotás, L.—Balázs, Gy.</i>	Mérnöki szerkezetek Anyagtana, III. (Kausay, T.)	178

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója.

Műszaki szerkesztő: Sándor István

A kézirat nyomdába érkezett: 1982. II. 18. — Terjedelem: 15.75 (A/5) ív

83.10570 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

100,— Ft

INDEX: 26.499
ISSN 0027—5085

Megjelent 1983. III. 25.